力学第2回

1章の復習問題

(1) 有効数字に気をつけて次の計算をせよ

(a) 1.234567 kg + 321.0g – 210111 mg

答： 単位を揃える

$$
\begin{array}{rl}
 & 1.234567 \\
+ & 0.3210 \\
\hline
 & 1.555567 \\
- & 0.210111 \\
\hline
 & 1.345456
\end{array}
$$

ゆえに、1.3455 kg

(b) 縦35mm、横5.0cmの長方形の面積

答： 単位を揃える

$$
\begin{array}{rl}
 & 3.5 \times 10^{-2}\ \mathrm{m} \\
\times & 5.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m} \\
\hline
 & 17.5 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2
\end{array}
$$

有効数字が2桁なので $1.8 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$

(2) 質量m、半径rの密度が一様な球体が中心を通る軸の周りに毎秒n回転している時、この球体の運動エネルギーの大きさは、m, r, nのどのような組み合わせで表されるか？ただし、エネルギーの次元は[力×距離]=[ML^2T^{-2}] とする。

[解]

それぞれを次元で表す:

質量m の次元は　[M]

半径rの次元は　[L]

回転数 n の次元は [T^{-1}]

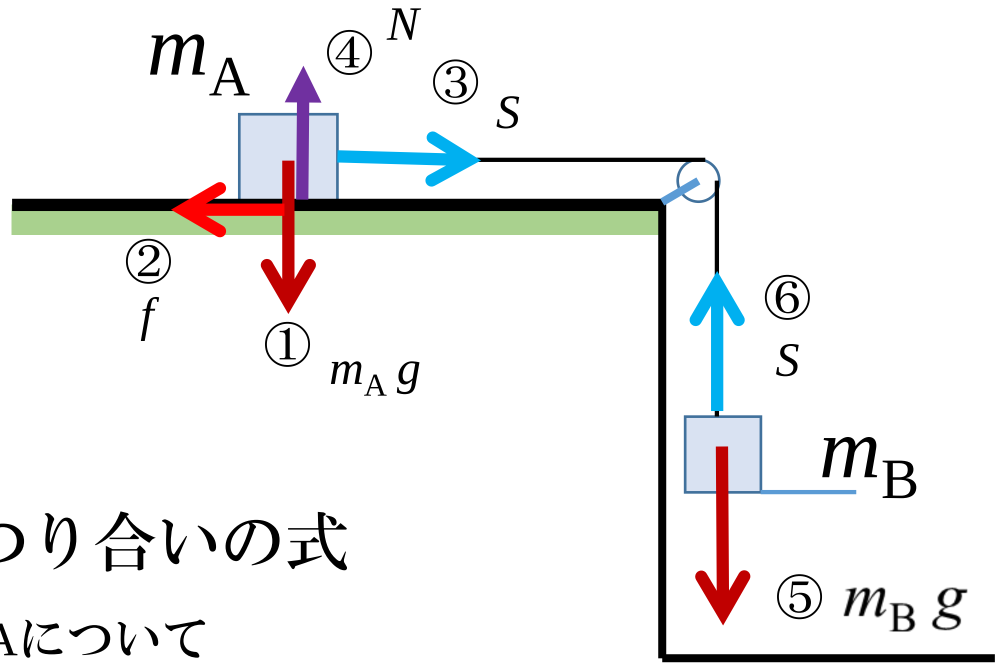
球体の運動エネルギーE の次元は[力×距離]=[ML^2T^{-2}]

$E = m^a r^b n^c$ であるとすると、

[ML^2T^{-2}] = [$M^aL^b(T^{-1})^c$] であるから、

a = 1　b=2　c=2

となる。ゆえに、 $E = m\, r^2\, n^2$



2章の復習問題

名称:

① 重力
大きさ: $m_A g$

② 静止摩擦力 fとする
大きさは?

③ 張力 Sとする
大きさは?

④ 垂直抗力 N
これはm_Aに対する重力とつり合うので
大きさ: $m_A g$

⑤ 重力
大きさ: $m_B g$

⑥ 張力、大きさは③に等しい
大きさは?

つり合いの式

Aについて

鉛直方向

$N = m_A g$

水平方向

$S = f$

Bについて

鉛直方向

$S = m_B g$

水平方向

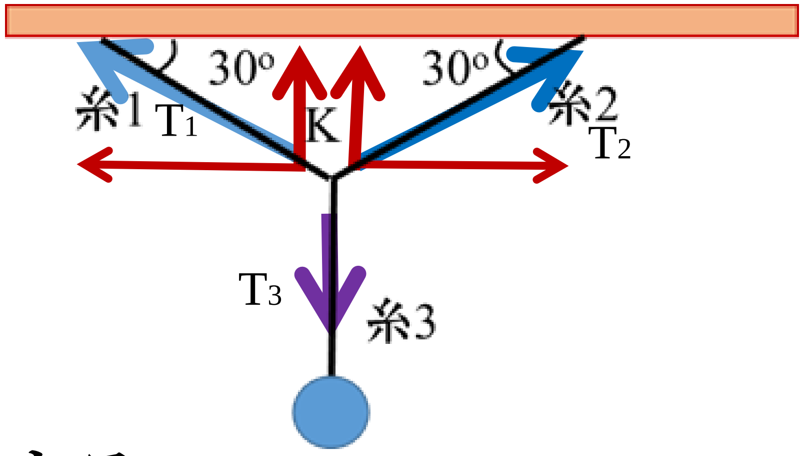
なし

これから、

$S = f = m_B g$

と求められる

右図のように、糸3本を使って、質量10kgの物体を天井から吊り下げたところ、糸１と天井がなす角が30°、糸２と天井がなす角も30°であった。結び目Kにはたらくそれぞれの糸1,2,3の張力はいくらか。ただし重力加速度の大きさを 9.8 m/s^{2}とする。



答:糸1, 糸2, 糸3の張力をそれぞれT_1, T_2, T_3 とする

はたらく力を書き込む

T3 は10kgの物体の重力とつり合うので、Kに対しては下向きに98 N

T_1とT_2の水平方向の分力がつりあう:　$T_1\cos30^\circ = T_2\cos 30^\circ$

T_1とT_2の鉛直方向の分力の和がT_3とつりあう: $T_1\sin30^\circ + T_2\sin 30^\circ = T_3$

これを解いて(最初の式から、 $T_1 = T_2$ が得られ、

これを次の式に代入して）　$T_1 = T_2 = T_3 = 98\text{N}$

3章の問題

(1) 2つのベクトル$\boldsymbol{A}$ = (1,−1, $\sqrt{2}$), $\boldsymbol{B}$ = (2, 2 1)について、以下のものを計算せよ

(a) $|\boldsymbol{A}|$

[答]　$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+\sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$

(b) $|\boldsymbol{B}|$

[答]　$|\boldsymbol{B}| = \sqrt{(-2)^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$

(c) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$

[答]　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 1\cdot 2 + (-1)\cdot 2+\sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$

(d) $\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$がなす角

[答]　$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$がなす角をθとすると、

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

これから $\theta = \arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$ としてもよい

行列式についてほんの少し…

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \boxed{a_1 b_2} - \boxed{a_2 b_1}$$

練習： $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

(2)以下のものを計算せよ

(a) 2つのベクトル$\boldsymbol{A}$ = (1,1,1) と $\boldsymbol{B}$= (2,3,4) の外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

1 1
4 2

[答]　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ = (1・4ー3・1, 1・2ー4・1, 1・3ー2・1) = (1, -2, 1)

(b) 3点(0,0,0), (1,1,1), (2,3,4) で作られる三角形の面積

[答]　(a)で求めた$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の大きさは、 2つのベクトル$\boldsymbol{A}$ = (1,1,1) と $\boldsymbol{B}$= (2,3,4) によって作られる平行四辺形の面積に等しい

これはまた、

3点(0,0,0), (1,1,1), (2,3,4) で作られる三角形の面積

の2倍の面積である。したがって、$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}$

であることから、答は $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

物体が静止しているための条件

(0) その物体に働く力をすべて図に書き込んで考える

(1) 力のつり合い

床においてあるのなら、床に平行(水平)方向にx軸、鉛直上方向にy軸をとる
斜面にあるのなら、斜面に平行にx軸、垂直上方向にy軸をとる
吊り下げられているのなら、鉛直下向きにx軸をとる

(a) x軸方向の力の和 = 0

(b) y軸方向の力の和 = 0

注: 正の力の大きさ=負の力の大きさ, という式でも良い

(2) 力のモーメントの和 --- 力のモーメント=ウデ(ベクトル)×力

適当な回転軸を想定(例:「P点周り」の力のモーメント)

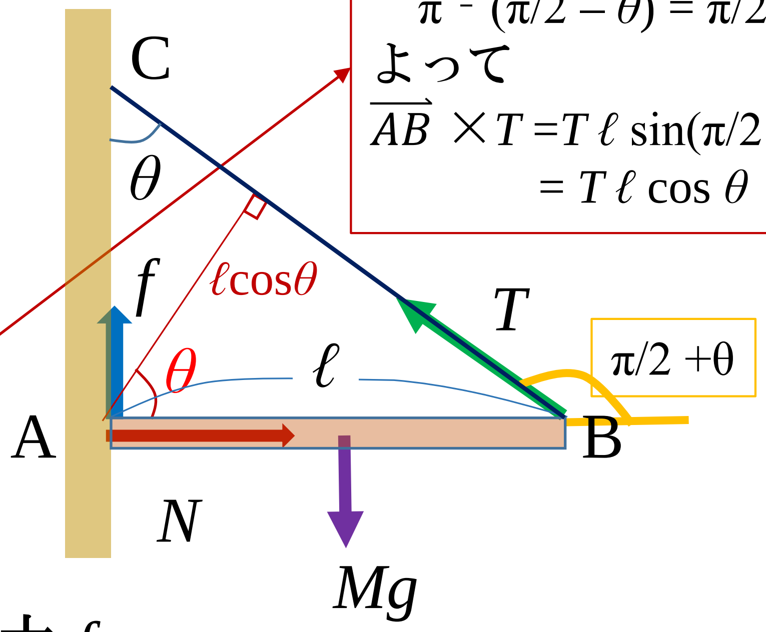
反時計回りの力のモーメントが正、時計回りは負

(3) 静止摩擦力が関係する場合、静止摩擦力をF, 静止摩擦係数をμ, 垂直抗力の大きさをNとすると

静止摩擦力の制約: $F \leqq \mu N$ この不等号が大事：等しい時が 最大静止摩擦力

4章の問題

右図のように、密度が一様な質量M、長さℓの棒が、一端は粗い壁の一点Aで接触し、他端は軽い伸び縮みしない糸BCで壁に結ばれて、水平になっている。糸と壁がなす角はθであり、棒と壁がなす角は90° である。壁と棒との静止摩擦係数をμとし、重力加速度の大きさをgとする。棒が静止状態にあるためには静止摩擦係数μの値はどうでなければならないか？



$\overrightarrow{AB}$ とSとの角は

$\pi - (\pi/2 - \theta) = \pi/2 + \theta$

よって

$\overrightarrow{AB} \times T = T\ell\sin(\pi/2 + \theta)$

$= T\ell\cos\theta$

答:　はたらく力を書き込む

重力　Mg、張力　T、垂直抗力 N、静止摩擦力 f

つりあいの式

水平方向:　$N = T\sin\theta$

鉛直方向: $Mg = f + T\cos\theta$

力のモーメントのつりあい(A点周り)　$\boxed{T\ell\cos\theta} = \frac{\ell}{2}Mg$

これから、$T = \frac{Mg}{2\cos\theta}$　　$\therefore f = \frac{Mg}{2}$

注: この場合B点回りで考えると すぐに　$f = \frac{Mg}{2}$　が導ける

最大静止摩擦力の制約により

$f \leqq \mu N$ から　$\frac{Mg}{2} \leqq \frac{1}{2}\mu Mg\tan\theta$

ゆえに、$\frac{1}{\tan\theta} \leqq \mu$