HW-02

物体が静止しているための条件

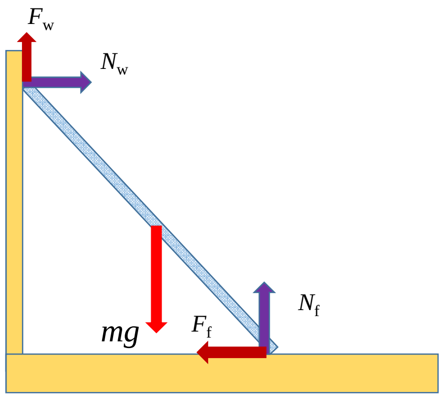
次の3つをまず書いてから考えよう

1. 並進条件
   鉛直方向(y軸方向）と水平方向(x軸方向)の力の釣り合い
   なお運動の可能性が3次元の場合はx, y, z軸の3式を考える
2. 回転条件
   適当な点を回転軸にとり、力のモーメントの和＝０の式をたてる
   いろいろな力が集中しているところを回転軸にとると式が簡単になる
3. 静止摩擦の制約
   静止摩擦力をF, 垂直抗力をN、静止摩擦係数をμとすると
   $F \leqq \mu N$
   「＝」ではないことに注意(よくある間違い)

問題1. 水平な床と垂直な壁があり、まっすぐで一様な長さlの細い棒が立てかけられている。棒が床面となす角度をθとする.

(1)棒にはたらく力を書きこめ(棒の質量をmとする)。

はたらく力は、重力(mg)、床からの垂直抗力(N_f)と壁からの垂直抗力(N_w)、床からの摩擦力(F_f)との壁から摩擦力(F_w)の5つ。



(2) 壁がなめらかで床との静止摩擦係数がμ_fのとき、棒がすべらない最小の角度を求めよ。

力のつり合いを考える:

床に平行方向: $N_w - F_f = 0$

床に垂直方向:

$$N_f + F_w - mg = 0$$

壁がなめらかだから、壁からの摩擦力F_w=0

よって、$N_f = mg$ 、$N_w = F_f$

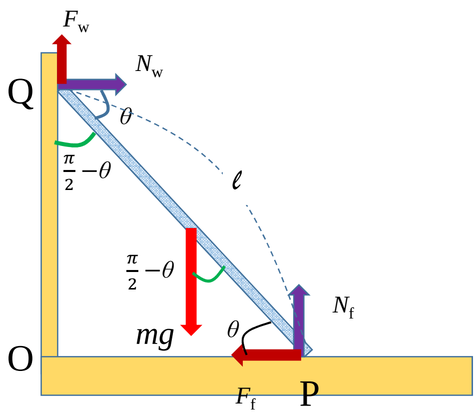
点Pでの力のモーメントのつり合いは、

$\frac{1}{2}\ell mg\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) - N_w \ell \sin\theta = 0$ $\boxed{\ell\text{を明記する}}$

これから $N_w = \frac{mg}{2\tan\theta}$ (注: $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$)

摩擦力の制約: $F_f \leqq \mu_f N_f$

よって $\frac{mg}{2\tan\theta} = N_w = F_f \leqq \mu_f N_f = \mu_f mg$



これらから $\frac{1}{2\tan\theta} \leqq \mu_f$

これを満たす$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$の最小値$\theta$は

$\tan\theta = \frac{1}{2\mu_f}$となる。∴ $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2\mu_f}$

(3)壁がなめらかで棒と床との静止摩擦係数がμ_fとする。質量が3mの物体をこの棒の上端から1/3のところにぶら下げる時、棒がすべらないための最小の角度を求めよ。

新たに質量Mの物体が加わった以外は、(2)とほぼ同じ条件なのでつり合いの式をたてる：

床に平行方向: $N_w - F_f = 0$

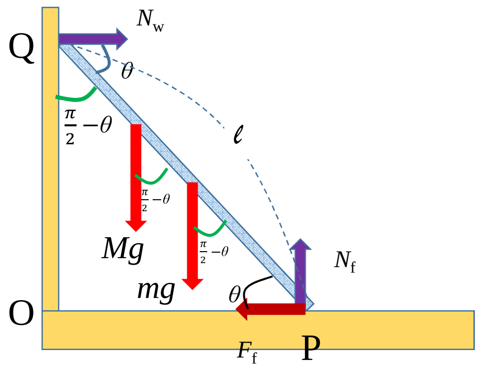
床に垂直方向:

$$N_f - (m+3m)g = 0$$

よって、$N_f = 4mg$ 、$N_w = F_f$

点Pでの力のモーメントのつり合いは、

$$\frac{2}{3}\ell(3m)g\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\frac{1}{2}\ell mg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-N_w\,\ell\sin\theta = 0$$



前のスライドから

$N_f = 4mg$ 、$N_w = F_f$

$$\frac{2}{3}\ell(3m)g\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\ell lmg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-N_w\,\ell\sin\theta = 0$$

これから　$N_w = \frac{5mg}{2\tan\theta}$

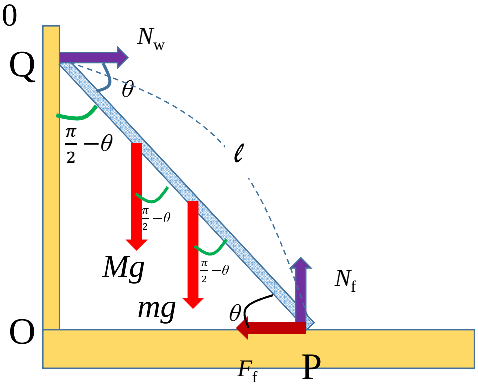
摩擦力の制約: $F_f \leqq \mu_f N_f$

よって $\frac{5mg}{2\tan\theta} = N_w = F_f \leqq \mu_f N_f = 4\mu_f mg$

これらから $\frac{5}{8\tan\theta} \leqq \mu_f$

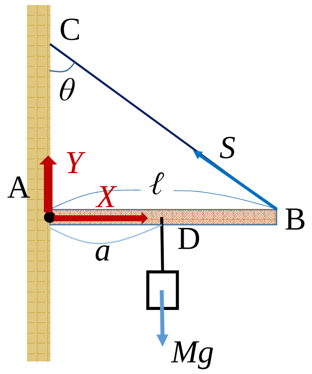
これを満たす$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の最小値θは

$\tan\theta = \frac{5}{8\mu_f}$となる。∴ $\theta = \tan^{-1}\frac{5}{8\mu_f}$



問2

- 右図のように、重さが無視できる長さℓの棒が、一端はピンAで壁に取り付けられ、他端は糸BCで壁に結ばれて、水平になっている。糸と壁がなす角はθである。いま、棒上の点D(AD=a)に質量Mのオモリを吊るした。重力加速度の大きさをg [m/s^2]として以下の問に答えよ。ただし、図においてXはピンAの抗力、YはピンAに壁に平行にはたらく力、Sは糸の張力を表す。答だけではなくどのように考えたかも分かるように書くこと。



(1) 棒が静止するために成り立つ条件を書け(M, g, a, ℓ, θ以外にX, Y, Sを用いて良い)

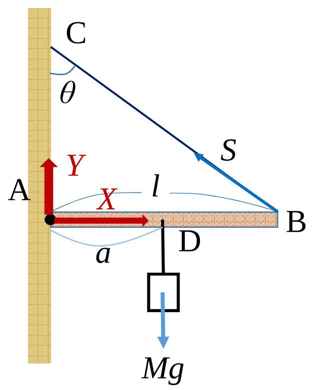
[解] この棒にかかる力をすべて書き込む。

糸の張力をSとする。棒の重さは無視できるが、おもりによる重力 Mgが点Dにかかる。また、点Aの抗力を2つに分けて考えることにする --- 棒に平行な力をX、棒に垂直な力をYとする。

この棒は静止しているのだから、2つの条件を満たしている。
まず(1)力のつり合い条件から、

垂直方向のつり合い: $Y + S\cos\theta = Mg$ … ①

水平方向のつり合い: $X = S\sin\theta$ … ②



次に(2)力のモーメントのつり合い条件から、
点Aの回りの力のモーメント:

$S\cos\theta \times \ell - Mg \times a = 0$ … ③

(2) 糸BCの張力S[N] の大きさを求めよ。M, g, a, ℓ, θから適切なものを用いて表すこと。

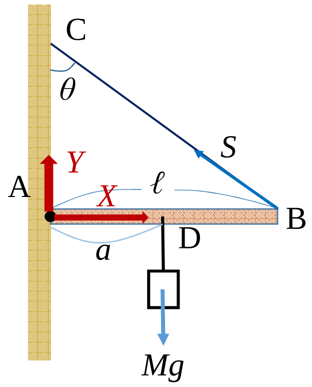
力のモーメントのつり合い条件により、$S = \dfrac{aMg}{\ell\cos\theta}$

実はB点回りの力のモーメントを求めたほうが計算が簡単であった：

$Mg(a - \ell) - Y\ell = 0$

これからすぐに Y の値が求まり、①によりSの値がわかる

(3) ピンAの抗力X[N] の大きさを求めよ。M, g, a, ℓ, θ から適切なものを用いて表すこと。
(4) ピンAに壁に平行にはたらく力Y[N]の大きさを求めよ。M, g, a, ℓ, θから適切なものを用いて表すこと。

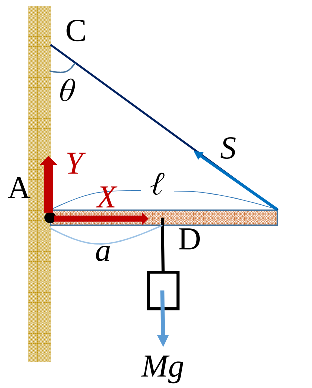


垂直方向のつり合い: Y+S $\cos\theta = Mg$
水平方向のつり合い: X=$S \sin\theta$

$$S = \frac{aMg}{\ell\cos\theta}$$

よって、 $X = \frac{a}{\ell} Mg \tan\theta$　　Y = $(1-\frac{a}{\ell})\,Mg$

(5)棒をピン止めするのではなく、A点で棒を壁に接触させているだけとする。棒がこの位置で静止するためには、棒と壁との静止摩擦係数μはどのような値でなければならないか、答えよ。(a, ℓ, θから適切なものを用いて表すこと)



Yの力が『棒と壁との静止摩擦」に代わると考える
すると、Yは最大静止摩擦力よりも大きくなれない
つまり、 $Y \leqq \mu X$

(4)の結果から　$X = \frac{a}{\ell} Mg \tan\theta$　　Y = $(1-\frac{a}{\ell})\,Mg$

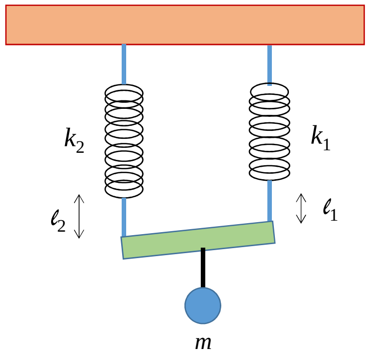
$$(1-\frac{a}{\ell})\,Mg \leqq \mu \frac{a}{\ell} Mg \tan\theta$$

$$\frac{\ell - a}{a \tan\theta} \leqq \mu$$

おまけの問題

バネ定数k_1とk_2のバネが右図のように長さLの棒の端にそれぞれ繋げられ、棒の中央には質量mのおもりがぶら下げられている。ここで、棒の重さは無視できるものとする。

二つのばねは自然長からそれぞれℓ_1とℓ_2の長さだけ伸びたとする。ここで重力加速度の大きさをgとする。



(1) ℓ_1とℓ_2の大きさを求めよ。
(2) ℓ_1=ℓ_2 であるためにはおもりはどの位置にぶら下げなければならないか？

---

(1) ℓ_1とℓ_2の大きさを求めよ。

答　力の釣り合い：　$k_1\ell_1 + k_2\ell_2 = mg$

棒の左端を回転軸とした力のモーメント：

$$\frac{L}{2}mg - k_1\ell_1 L = 0$$

$\therefore \ell_1 = \frac{mg}{2k_1}$　よって　$\ell_2 = \frac{mg}{2k_2}$

(2) ℓ_1=ℓ_2 であるためにはおもりはどの位置にあるべきか？

答　$\ell_1=\ell_2=\ell$ とする。また答えは棒の左端からxLの位置とする。

力の釣り合い：$(k_1 + k_2)\ell = mg$　　$\therefore \ell = \frac{mg}{k_1 + k_2}$

棒の左端を回転軸とした力のモーメント：

$$xLmg - k_1\ell L = 0$$

$$\therefore x = \frac{k_1}{mg}\ell = \frac{k_1}{mg}\frac{mg}{k_1 + k_2} = \frac{k_1}{k_1 + k_2}$$

つまり、棒を $k_1 : k_2$　で内分する点