

学籍番号 _____

氏名 _____

前提知識: わからなければ教科書で調べること 運動方程式、微分方程式、円運動、重力
以下では、重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。

問題 1. 時刻 $t=0$ において、質量 m [kg] の小物体を地上から速さ v_0 [m/s] で真上に投げ上げた。地表から鉛直上方に y 軸を取り、小物体の位置を表すものとする。なお、時刻 $t=0$ での小物体の位置を $y=0$ とし、空気の抵抗は無視できるとする。

この小物体が投げあげられてから地表に落ちるまでの運動を考える。

(1) 時刻 t における小物体の加速度 ($\frac{d^2y}{dt^2}$) を答えよ。簡単な説明もつけること。

解答: 空気抵抗は無視できるので、この物体にはたらく力は重力のみだから

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \quad \therefore \frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad [\text{m/s}^2]$$

(2) 時刻 t における小物体の速度 ($\frac{dy}{dt}$) を答えよ。簡単な説明もつけること。

解答: (1) から $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$

これを時間で積分、初期条件 ($t=0$ での値) から $\frac{dy}{dt} = -gt + v_0$ [m/s]

(3) 時刻 t における小物体の位置 (y) を答えよ。簡単な説明もつけること。

解答: (2) で求めた速度を t で積分、 $t=0$ での位置 ($y=0$) から $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ [m]

(4) (3) の式で $y=0$ として t の値を求めることにより、この小物体が地表に落ちる時刻を求めよ。

解答: (3) の式において $y=0$ の解を求める: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t = 0$

これより $t=0, \frac{2v_0}{g}$ \therefore 地表に落ちる時刻 $t = \frac{2v_0}{g}$ [s]

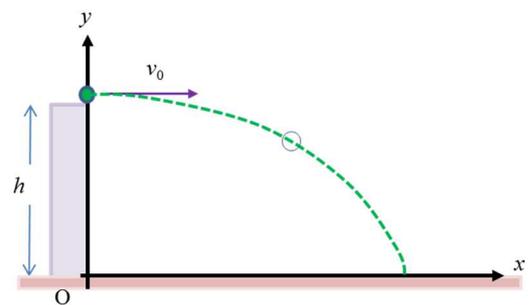
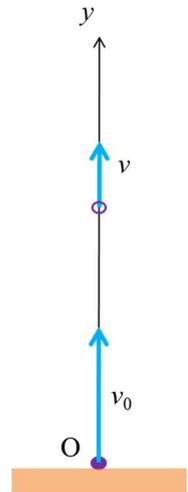
(5) (2) の式で $\frac{dy}{dt} = 0$ を満たす t の値から、この小物体が到達する最高点の位置を求めよ。

解答: $\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 = 0$ より、 $t = \frac{v_0}{g}$ [s] で最高点に

到達。この値を(3) に代入して最高点の位置

$$y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{2g} \quad [\text{m}]$$

別解: 高校物理の知識: $v_1^2 - v_0^2 = 2ax$ において $a = -g, v_1 = 0, v_0 = v_0$ から x を求める



問題 2. 時刻 $t=0$ において、質量 $m[\text{kg}]$ の小物体を地表 $h[\text{m}]$ の高さの点から速さ $v_0[\text{m/s}]$ で水平方向に投げた。右図のように、地面に平行に x 軸、垂直に y 軸をとり、小物体の位置を表すものとする。この小物体が地表に落ちるまでの運動を考えよう。なお、空気抵抗は無視できるとする。

(1) 時刻 t における小物体の x 軸方向の加速度 ($\frac{d^2x}{dt^2}$) を答えよ

解答: 空気抵抗無視なので、 x 軸方向の力は働かない、ゆえに $0 [\text{m/s}^2]$

(2) 時刻 t における小物体の y 軸方向の加速度 ($\frac{d^2y}{dt^2}$) を答えよ

解答: 重力がはたらく。運動方程式 $m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg$ より、 $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$

(3) 時刻 t における小物体の x 軸方向の速度 ($\frac{dx}{dt}$) を答えよ

解答: (1) の解答を t で積分、初期条件 ($t=0$ での x 軸方向の速さ v_0) から

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \quad [\text{m/s}]$$

(4) 時刻 t における小物体の y 軸方向の速度 ($\frac{dy}{dt}$) を答えよ

解答: (2) の解答を t で積分、初期条件 ($t=0$ での y 軸方向の速さ 0) から $\frac{dy}{dt} = -gt \quad [\text{m/s}]$

(5) 時刻 t における小物体の x 軸方向の位置 (x) を答えよ

解答: (3) の解答を t で積分、初期条件 ($t=0$ で $x=0$) を考慮して $x = v_0 t \quad [\text{m}]$

(6) 時刻 t における小物体の y 軸方向の位置 (y) を答えよ

解答: (4) の解答を t で積分、初期条件 ($t=0$ で $y=h$) を考慮して $y = -\frac{1}{2}gt^2 + h \quad [\text{m}]$

(7) (6) の式から地表に小物体が落ちる時刻 t を求める。それにより、小物体が地表におちた x 軸方向の位置を求めよ。

解答: (6) の式において、 $y=0$ をみたく $t > 0$ を求めると $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad [\text{s}]$

これを(5)の式 $x = v_0 t$ に代入して $x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad [\text{m}]$

問題 3. 一様な重力と速度に比例した空気の抵抗(質量にはよらない、空気抵抗の比例定数は k とする)を受けて点 O から速さ $v_0[\text{m/s}]$ で鉛直上向きに投げ上げられた質量 $m[\text{kg}]$ の小物体 A の t 秒後の速度、位置、および $t \rightarrow \infty$ での速度(終速度)を求めたい。ただし点 O を原点とし、鉛直上方に y 軸を取るものとする。

(1) 小物体 A の運動方程式を書け(y 軸方向のみでよい)

解答: 小物体にはたらく力は

重力 $-mg$

空気抵抗 $-kv$ (速度を v とする)

である。よって運動方程式: $m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg - kv$

もしくは $m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$

(2) 初期条件($t=0$ における小物体の位置と速度)を考慮して(1)の微分方程式を解け(時刻 t [s] ($t \geq 0$) における速度と位置の式を答えよ)

解答: (1)から $m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$

式の変形 $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}(v + \frac{m}{k}g)$

$$\frac{1}{v + \frac{m}{k}g} \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}$$

時間で積分 $\int \frac{1}{v + \frac{m}{k}g} \frac{dv}{dt} dt = \int -\frac{k}{m} dt$

$$\log(v + \frac{m}{k}g) = -\frac{k}{m}t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

変形 $v + \frac{m}{k}g = \exp(-\frac{k}{m}t + C) = C' \exp(-\frac{k}{m}t)$ ただし $C' = \exp(C)$

初期条件 $t=0$ で $v=v_0$ より、 $v_0 + \frac{m}{k}g = C'$ だから

$$v + \frac{m}{k}g = (v_0 + \frac{m}{k}g) \exp(-\frac{k}{m}t)$$

書き直し $v = -\frac{m}{k}g + (v_0 + \frac{m}{k}g) \exp(-\frac{k}{m}t)$ [m/s]

(3) (2)で求めた速度の式において、 $t \rightarrow \infty$ とした極限値を答えよ。

解答: (2)から $v = -\frac{m}{k}g + (v_0 + \frac{m}{k}g) \exp(-\frac{k}{m}t)$

$t \rightarrow \infty$ の極限値は ($\exp(-\infty)=0$ により)

$$-\frac{m}{k}g [\text{m/s}]$$

