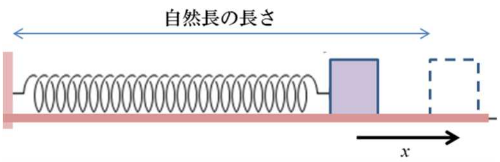
学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

前提知識: 仕事、力学的エネルギー(位置/運動エネルギー)、力学的エネルギー保存則

問題 1. 水平面上に、ばね定数 k [N/m]のばねの一端を壁に固定し、他端に質量 m[kg]の小物体をおしつけ、長さを x[m]だけ縮めて放した。この水平面の動摩擦係数をμ'、空気抵抗は無視できるものとし、重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。



(1) ばねが自然長の長さになったときに、小物体はばねから離れる。それまでに小物体に対して摩擦がした仕事を答えよ。

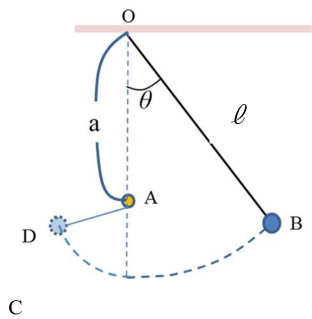
解答：ばねから離れる前の摩擦力の大きさは $\mu' mg$ これが距離 x[m]だけ働き、かつ小物体の動きと逆向きなので $-\mu' mgx$ [J]

(2) 自然長から x[m]縮めて押し付けられていた時のバネの弾性エネルギーを求めよ。この値と(1)の答えから、小物体がばねから離れるときの速さを求めよ。

解答：x[m]縮めて押し付けられていた時のバネの弾性エネルギーは、$\frac{1}{2}kx^2$ [J]

バネが自然長の長さになった時、小物体がバネから離れる。このときの速さを v[m/s] とする。その時までに小物体は $\frac{1}{2}mv^2$[J]のエネルギーを得、バネは、$\frac{1}{2}kx^2$[J]のエネルギーを失う。この差が物体が摩擦に逆らってする仕事 $\mu' mg$ に等しいので、 $\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \mu' mgx$ が成り立つ。 ∴ $v=\sqrt{\frac{k}{m}x^2 - 2\mu' gx}$

問題 2. 右図のように、天井の一点 O から伸び縮みしない長さ l の軽いヒモで質量 m の小物体をつるし、鉛直線と θ をなす点 B まで引いてからこの小物体を放した。O の真下の距離 $a(<l)$に釘 A があり、小物体は A 点の真下の点 C を通って、D 点に到達した後、B 点に戻ってきた。ここで、空気抵抗は無視できるものとし、重力加速度の大きさを g とする。



(1) C 点を位置エネルギーの基準点として、B 点における小物体の位置エネルギーを求めよ。

解答：C 点を基準にしたときの B 点の高さは $\ell(1 - \cos\theta)$

∴B 点における位置エネルギーは $mg\ell(1 - \cos\theta)$

(2) C 点を通過する時の小物体の速さを求めよ。

解答：力学的エネルギー保存則から $mg\ell(1 - \cos\theta) = mv^2/2$

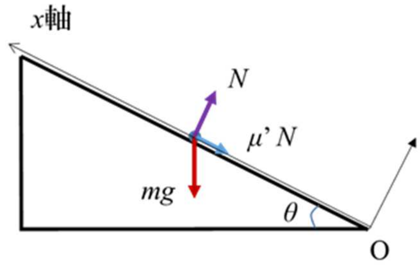
∴ $v = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta)}$

(3) 直線 AD と AC の間の角を求めよ。

解答：力学的エネルギー保存則から D も B と同じ高さになる。求める角度を φ とすれば

$(\ell - a)\cos\varphi = \ell\cos\theta - a$ ∴ $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\ell\cos\theta - a}{\ell - a}\right)$

問題 3　右図のように水平方向と θ の角度をなす斜面があり、この斜面上の点 O に質量 m [kg]の質点を置いた。そして、初速 v_0 [m/s]を与えたところ、質点は摩擦力を受けながら、斜面にそってすべり上がった。ここで、重力加速度の大きさを g[m/s^2]、質点と斜面との動摩擦係数を μ' とする。点 O を原点にとり、斜面にそって上方向に x 軸、斜面に垂直上向き方向に y 軸を取って考える。空気抵抗は無視でき、また質点が斜面を上がり始めた時刻を t=0 とする。



(1) 斜面を上がっている質点に対してはたらく動摩擦力の大きさを m, g, θ、μ'だけを用いて表わせ。

解答：　斜面から質点が受けている垂直抗力 $N = mg\cos\theta$ より

動摩擦力の大きさは $\mu' mg\cos\theta$

(2) 斜面を上がっている質点に対する x 軸方向の運動方程式を書け。

解答: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu' mg\cos\theta - mg\sin\theta$

(3) (2)の式と初速度を考慮して、斜面を上がっている質点の速度の式を求めよ。

解答: (2)の式を両辺 t で積分し　初期条件 $v(0)= v_0$ を代入して

$v(t) = v_0 - g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)t$

(4) (3)から、斜面を上がっていた質点が停止する時刻を求めよ。

解答: 質点が停止する時刻 t は $v(t)=0$ を満たす

$\Rightarrow\ v_0 - g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)t = 0 \qquad \therefore\ t = \frac{v_0}{g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)}$

(5) (3), (4)から、質点が斜面をあがった最高点の x 座標を求めよ。

解答: (3)の式を両辺 t で積分し、初期条件 $x(0)= 0$ を代入して

$x(t) = v_0 t - \frac{g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)t^2}{2}$　　これに $t = \frac{v_0}{g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)}$ を代入して

停止した位置の x 座標 $= \frac{{v_0}^2}{2g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)}$

問題 4. 問題 3 を力学的エネルギーの観点から考える。ここで原点 O を位置エネルギーの基準点とする。

(1) 質点が斜面を上がり始めたときの質点の力学的エネルギーを求めよ。

解答：$\frac{1}{2}m{v_0}^2$

(2) 質点が運動して x 座標が L[m]の場所にきたときの位置エネルギーを求めよ。

解答：$mgL\sin\theta$

(3) 質点が運動して x 座標が L[m]の場所にきたときまでに動摩擦力がした仕事を求めよ。

解答: $-\mu' mgL\cos\theta$

(4) (2), (3)から質点が最高点に達した時の x 座標の値を(問題 3 とは別に)求めよ。

解答: ：$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgL\sin\theta + \mu' mgL\cos\theta$ より　$2Lg(\mu'\cos\theta + \sin\theta) = {v_0}^2$

よって　$L = \frac{{v_0}^2}{2g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)}$