学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

前提知識: わからなければ教科書で調べること　力学的エネルギー保存則、運動量保存則

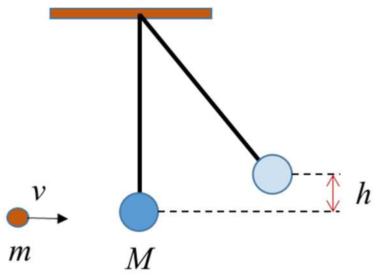
問題 1. 質量 m[kg]のボールを高さ H[m]のところで手を静かにはなし真下に落としたところ、床で跳ね返り、高さ h[m] ($h \leqq H$)まで到達した。このことから、ボールと床の反発係数(はねかえり係数)の値を求めよ。ただし重力加速度の大きさを g[m/s^2]とし、空気抵抗は無視できるものとする。

解答: ボールと床の反発係数を e とおく。

ボールが床に接触する直前の速さ $v = \sqrt{2gH}$ [m/s]である。これにより跳ね返った直後の速さは ev と表され、これにより跳ね返り後の最高点 $h = (ev)^2/(2g)$ と表される。

このことから、 $h = (e\sqrt{2gH})^2/(2g) = e^2H$ となる。∴ $e = \sqrt{h/H}$

問題 2. 質量 M [kg]の砂袋が天井から軽く伸び縮みしない糸でつり下げられている。いま、水平方向から質量 m [kg]の弾丸を最下点に静止している砂袋に打ち込んだところ、弾丸は砂袋と一体となって図のように高さ h[m]のところまで上がった。衝突直前の弾丸の速さを v[m/s]として、高さ h[m]を求めよ。ただし空気抵抗は無視できるものとし、重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。



解答: 弾丸と砂袋を一つの質点系とみなす。これには外力として重力と糸の張力だけがはたらく。張力は運動と垂直にはたらくので影響を及ぼさない。衝突がきわめて短い時間でおきることを考えると、重力の影響も無視できる。したがって、衝突前後で、運動量保存の法則が成り立つと考える。

衝突直後の一体となった弾丸と砂袋の速さを v'とすると、運動量保存の法則から

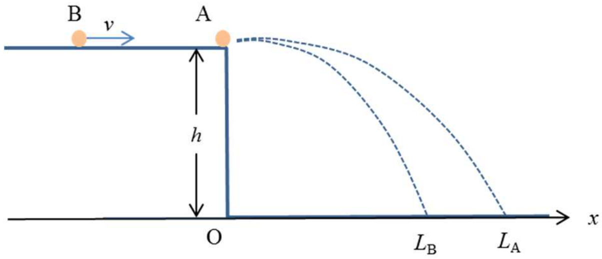
$mv = (M+m)v'$　　　これから $v' = mv/(M+m)$　―――　①

衝突後の運動では、力学的エネルギー保存則が成り立つ。つまり、衝突直後の位置を位置エネルギーの基準点にとれば　$\frac{1}{2}(M+m)v'^2 = (M+m)gh$　　これから $h = \frac{v'^2}{2g}$　―――　②

①、②から　$h = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2$

問題 3　右図のように高さ h [m]の水平でなめらかな台の上に小球 A を置く。そして A に向かって小球 B を速さ v[m/s]で衝突させる。この後 A と B は台から水平に飛び出し、台の端の位置を原点とす

る x 軸上の水平面に落下した。このとき、A と B は同じ鉛直面内を運動し、落下位置はそれぞれ原点から L_A[m], L_B[m]であったとする。ここで重力加速度の大きさを g[m/s^2]、空気抵抗は無視できるものとする。



(1) 衝突後の A と B の速さをそれぞれ求めよ。

解答: 衝突後の A と B の速さをそれぞれ v_A[m/s], v_B[m/s]とする。A も B も同じ時刻に落下すると考えられるので、落下に要する時間を t[s]とすると、

$v_A\, t = L_A,\quad v_B\, t = L_B$ となる。

また、これは高さ h[m]から床に落ちた時間であるので、$h = \frac{1}{2}gt^2$ である。これから、

$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ [s]と求まる。$\therefore v_A = L_A\sqrt{\frac{g}{2h}}$ [m/s]、$v_B = L_B\sqrt{\frac{g}{2h}}$ [m/s]

(2) A と B の衝突における反発係数の値を求めよ。

解答: 反発係数の値を e とおくと、

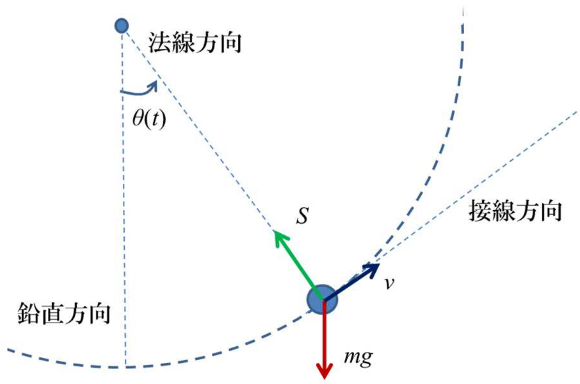
$v_A - v_B = ev$ がなりたつ。

$$\therefore\ e = \frac{v_A - v_B}{v} = \frac{(L_A - L_B)}{v}\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

問題 4. 微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

が $x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$ (C_1 と C_2 は初期条件によって定まる)という一般解を持つことを前提として、以下の問に答えよ。

天井の一点から長さ l [m] の糸を垂らし、その先に質量 m[kg]の質点をつけ、鉛直面内で微小振動させる。この単振り子の運動の周期が $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ [s]で与えられることを示せ。ただし、重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。



ヒント: 質点の速度を v[m/s]、回転角を θ [rad]とすると、$v = l\,\frac{d\theta}{dt}$ と書ける)

解答: 質点の運動の運動方程式は、質点の速度を v[m/s]、回転角を θ [rad]とすると、

$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta$ と表せる。ここで$v = l\,\frac{d\theta}{dt}$ と書けることから、$l\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$

また θが小さい時 $\theta \cong \sin\theta$ であるので、$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$ とかける。ここで$\omega^2 = \frac{g}{l}$とすると、この一般解は $x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$ と表される。ここで t=0 のときの初期値($\dot{\theta}$=0)から、

C_2=0 となるので、$x = C_1 \sin \omega t$ と表される事がわかる。ゆえに、周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ [s] である