2018 年 4 月 23 日　　物理学宿題(締切 26 日 9:00　提出先: 11 号館 6 階)　担当:白井英俊

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 1. 以下の問に答えよ。

(1) 質点の位置が $x(t)=-5t^2+10$ で与えられるとき、質点の速度と加速度を求めよ。

解答　速度$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=-10\,t$

加速度$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=-10$

(2) 質点の位置ベクトルが次式で与えられる時、速度ベクトルと加速度ベクトルを求めよ(ただし、a, b, c は定数。ここで答え方は 例えば$(3t, 4, t)$ の形でも $3t\,\boldsymbol{i}+4\,\boldsymbol{j}+t\,\boldsymbol{k}$ の形でも良い。

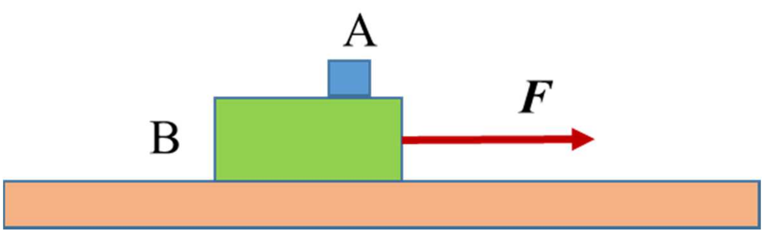
$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos(bt+c),\quad a\sin(bt+c),\quad 0)$　注: $\boldsymbol{r}(t)=a\cos(bt+c)\,\boldsymbol{i}+a\sin(bt+c)\,\boldsymbol{j}$ と等価

解答　速度$v(t)=\frac{dr(t)}{dt}=(-ab\,sin(bt+c),\ ab\,cos(bt+c),0)$　or　$-ab\sin(bt+c)\,\boldsymbol{i}+ab\cos(bt+c)\,\boldsymbol{j}$

加速度$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=(-ab^2\,cos(bt+c),-\ ab^2\,sin(bt+c),0)$

or $-ab^2\,cos(bt+c)\boldsymbol{i}\ -ab^2\,sin(bt+c)\boldsymbol{j}$　これは $-b^2\boldsymbol{r}(t)$ とも書ける

問題 2. なめらかな水平な床の上に質量 M の小物体 B があり、その上に質量 m の小物体 A が載っている。小物体 B の上面と小物体 A の下面は水平であるとする。
B に糸をつけて水平に力 $\boldsymbol{F}$ で引っ張った。ここで、重力加速度の大きさを g とし、空気の抵抗は無視できるものとする。また右方向を正とする。



(1) 小物体 B の上面は滑らかで、小物体 A と小物体 B の間には摩擦がはたらかないとする。このときの小物体 A と B の加速度をそれぞれ求めよ。

解答 --- これはだるま落としの状態(B がすり抜けた後は A は自由落下する)

小物体 A と小物体 B の間には摩擦がはたらかない⇒A には水平方向に力が働かない

よって**小物体 A の水平方向の加速度　= 0 （垂直方向は重力と垂直抗力が釣り合うため、A の下に B がある限り垂直方向の加速度も 0、A は床からの垂直抗力と重力が釣り合うためいつも 0）**

小物体 B も、A とも床の間にも摩擦がはたらかない⇒摩擦力は 0

したがって B だけが F によって加速度を持つ。その加速度 $\alpha=\frac{F}{M}$　$(\because F=M\alpha)$

A の下に B がいなくなると、重力がはたらくため、落下し、そのときの垂直方向の加速度は g

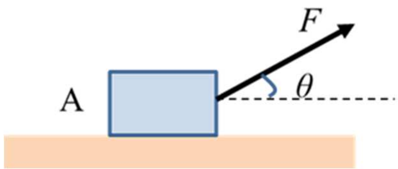
(2) 小物体 A と小物体 B の間には摩擦がはたらき、A と B は等しい大きさの加速度で動いた。このときの A と B の加速度、および A と B の間の摩擦力の大きさを求めよ。

解答　A と B が一体となって動いた(同じ加速度を持つ)ので、その加速度を α とすると、

$F=(M+m)\alpha$　が成り立つ。ゆえに、$\alpha=\frac{F}{(M+m)}$

B は摩擦力によってこの加速度をもつから、摩擦力の大きさは $m\alpha\ =\frac{m}{(M+m)}F$

問題 3. 水平な床の上の質量 m[kg]の物体 A を、水平面と角 θ をなす力 F[N]で引っ張ったが、物体 A は傾きもせず、動き出しもしなかった。このときの A に働く静止摩擦力の大きさを答えよ。ここで A と床との静止摩擦係数は μ とする。



解答　静止摩擦力の大きさを f[N]、床からの垂直抗力を N[N]とする。

水平方向の力の釣り合い: $f = F\cos\theta$　　---- これが答え

鉛直方向の力の釣り合い　$N + F\sin\theta = mg$

静止摩擦力の制約　　$f \leqq \mu N = \mu(mg - F\sin\theta)$

$F\cos\theta \leqq \mu(mg - F\sin\theta)$　　となるので、$F(\cos\theta + \mu\sin\theta) \leqq \mu mg$

ゆえに、$F \leqq \mu mg / (\cos\theta + \mu\sin\theta)$

だから、$f \leqq \mu mg\cos\theta / (\cos\theta + \mu\sin\theta) = \mu mg / (1 + \mu\tan\theta)$　がなりたつ

問題 4. 以下の問に答えよ。

(1) 平らな直線状の道路を時速 36 km で走っていた自動車が時刻 t =0 でブレーキをかけて、等加速度直線運動により 50 m 走って止まった。このときの加速度の大きさと停止した時刻を求めよ。

解答　まず時速 36 km を SI 単位系で表す。 36×10^3 m/(60×60)s　= 10 m/s

停止した時刻を T[s]、加速度の大きさを a[m/s^2]とすると、$10 = aT$

また、$\int_0^T (10 - at)dt = [10t - \frac{1}{2}at^2]_0^T = 10T - \frac{1}{2}aT^2 = 50$

これを解くと、T = 10 s、 a =1.0 m/s^2　　　別解:　$0^2 - 10^2 = -2a*50$ を用いてもよい

(2) 自動車がブレーキをかけて止まるとき、はたらく力は動摩擦力だけである。問題(1)が実現するための、動摩擦係数 μ' の値を求めよ。ただし、自動車の質量は 500kg、重力加速度の大きさを 10m/s^2 とする。

解答

動摩擦力 μ' ×500×10 が質量 500kg の自動車に 1.0 m/s^2 の加速度を生むのだから

$5000\mu' = 500\times1.0$　　$\therefore \mu' = 0.10$

(3) 小球が半径 r = 10 m の円周上を、周期 T = 4.0 s で等速円運動している。この小球の角速度 ω、回転数 n, 速さ v, 加速度の大きさ a を、それぞれ単位も含めて答えよ。ただしπ=3.14、π^2=9.87 とする。

解答　角速度 $\omega = 2\pi/T = 0.50\pi = 1.57$　　$\therefore$ 1.6 rad/s

回転数 $n = 1/T = 1/4.0 = 0.25$　　$\therefore$ 0.25 Hz

速さ $v = r\omega = 10\times1.57 = 15.7$　　$\therefore$ 16 m/s

加速度の大きさ $a = r\omega^2 = 10\times(0.50\pi)^2 = 2.5\times9.87 = 24.649$　　$\therefore$ 25 m/s^2

(4) 小球が鉛直面内を「等加速度」運動している。時刻 t=0 における位置ベクトルを 0、速度ベクトルを $5\boldsymbol{i}+20\boldsymbol{j}$、加速度ベクトルを $-10\boldsymbol{j}$ とする。

(a) 時刻 t における小球の位置ベクトルを求めよ(例:　$(10t+3)\boldsymbol{i} +-(9.8t^2+30t+5)\boldsymbol{j}$ のように表せ)

解答　速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t) = -10t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v}(0) = 5\boldsymbol{i} + (-10t + 20)\boldsymbol{j}$

ゆえに　$\boldsymbol{r}(t) = 5t\boldsymbol{i} + (-5t^2 + 20t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{r}(0) = 5t\boldsymbol{i} + (-5t^2 + 20t)\boldsymbol{j}$

(b) 小球の位置ベクトルの y 成分($\boldsymbol{j}$ の係数)が 0 となる時刻(ただし $t > 0$)を求めよ。

解答　(a)から $-5t^2 + 20t = 0$ これを解くと、$t = 0$ または 4.0

$t > 0$ から $t = 4.0$ s

(c) 下のグラフにおいて、t=0 から t=4.0 まで、0.5 刻みで、小球のそれぞれの位置を✖印で表わせ。