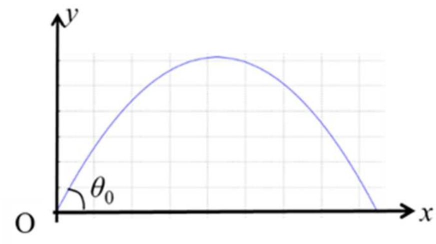
講義　物理「力学」宿題(締切：2 日午後 6 時、場所: 11 号館 6 階 EV ホール)　2018-04-30

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　**氏名**＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題１． 時刻 $t = 0$ において、小物体を地表面の一点 O から、水平方向と θ_0 の角をなす方向に速さ v_0[m/s]で投げた($0< \theta_0< \pi/2$)。右図のように、O を原点とし、地面に平行方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとって、小物体の位置を表すものとする。この小物体が地表に落ちるまでの運動を考えよう。重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。



(1) 時刻 t における小物体の x 軸方向の加速度($\frac{d^2x}{dt^2}$) を答えよ。

解答:　x 軸方向には力が働かないので $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ [m/s^2]

(2) 時刻 t における小物体の y 軸方向の加速度($\frac{d^2y}{dt^2}$) を答えよ。

解答:　y 軸方向には重力が働く。 $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ [m/s^2]

(3) 時刻 t における小物体の x 軸方向の速度($\frac{dx}{dt}$) を答えよ。

ポイント

(1) 運動の方向(水平方向、鉛直方向)ごとに運動方程式をつくる

(2) 運動方程式：(質量 m, 加速度 α)

$m\alpha$ = 力の総和

力の総和=0 ならつり合い□ α=0

解答: (1)より $\frac{dx}{dt} = \int \frac{d^2x}{dt^2} dt = 0 + C$ (C は積分定数)　t=0 のときの x 軸方向の速さが $v_0\cos\theta_0$ であるから $C = v_0\cos\theta_0$　　∴ x 軸方向の速度は $v_0\cos\theta_0$ m/s]

(4) 時刻 t における小物体の y 軸方向の速度($\frac{dy}{dt}$) を答えよ。

解答:　(2)より $\frac{dy}{dt} = \int \frac{d^2y}{dt^2} dt = -gt + C$ (C は積分定数)　t=0 のときの y 軸方向の速さが $v_0\sin\theta_0$ であるから $C = v_0\sin\theta_0$　∴ y ¥y 軸方向の速度は $-gt + v_0 \sin\theta_0$

(5) 時刻 t における小物体の x 軸方向の位置(x) を答えよ。

解答:　(3)より $x = \int \frac{dx}{dt} dt = v_0 t\cos\theta_0 + C$ (C は積分定数)　t=0 のとき x=0 より　$v_0 t\cos\theta_0$ [m]

(6) 時刻 t における小物体の y 軸方向の位置(y) を答えよ。

解答:　(4)より $y = \int \frac{dy}{dt} dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta_0 + C$(C は積分定数)

$t = 0$ のとき $y = 0$ より $-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta_0$ [m]

(7) (6)において y=0 として、地表に小物体が落ちる時刻 t[s]を求める。それにより、小物体が地表におちた x 軸方向の位置を答えよ。

解答: $-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta_0 = 0$ の解 t=0, $\frac{2}{g} v_0\sin\theta_0$　文意から t > 0 より、t= $\frac{2}{g} v_0\sin\theta_0$ [s]

この値と(5)の結果から $x=\frac{2}{g}v_0{}^2\sin\theta_0\cos\theta_0=\frac{1}{g}v_0{}^2\sin(2\theta_0)$ [m]

(8) (4)=0 として、小物体が最高点に達する時刻 t'[s] を求めよ。また、最高点における小物体の位置(x 座標と y 座標)を答えよ。

解答: $\frac{dy}{dt}=-gt+v_0\sin\theta_0=0$ より $t=\frac{1}{g}v_0\sin\theta_0$ [s]　これを(5),(6)に代入

x 座標: $\frac{1}{g}v_0{}^2\sin\theta_0\ \cos\theta_0=\frac{1}{2g}v_0{}^2\sin(2\theta_0)$ [m]

y 座標: $-\frac{1}{2g}v_0{}^2\sin^2\theta_0+\frac{1}{g}v_0{}^2\sin^2\theta_0=\frac{1}{2g}v_0{}^2\sin^2\theta_0$ [m]

ポイント
三角関数 の公式
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

問題 2. 上の結果から、空気の抵抗が無視できる場合、小物体を最も遠くに飛ばすには、どの角度で投げたらよいかを答えよ。

解答: 問題 1(7)より小物体が地表に落ちた x 座標の値は $x=\frac{1}{g}v_0{}^2\sin(2\theta_0)$で与えられる。

この最大値は g, v_0 が定数であることから$\sin(2\theta_0)$ が最大となるとき、つまり $2\theta_0=\frac{\pi}{2}$ のときである

$(0<\theta_0<\frac{\pi}{2})$。 $\therefore\theta_0=\frac{\pi}{4}$ [rad]

ポイント
三角関数 の常識 $(-\pi\le\theta\le\pi$ とすると)

$\sin\theta$ の最大値は 1 ($\theta=\frac{\pi}{2}$のとき)、最小値は -1 ($\theta=-\frac{\pi}{2}$のとき)

$\sin 0=\sin\pi=0$　$\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}$　$\sin\frac{\pi}{3}=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\cos\theta$

問題 3 水平面上に半径 r [m]の円周がある。その一点から初速 0 m/s で時刻 $t=0$ に出発した質点が、1 秒あたり α [m/s] の割合でその速さを増しながら円周上を運動している。摩擦は無視できるとして、時刻 t [s]における質点の(1)速さと、(2)加速度の大きさをそれぞれ答えよ。ただし(2)には重力加速度は含めない。

ヒント: 円運動している質点は円の中心方向と接線方向の加速度を持つ。(2)で問われているのは、この 2 つの加速度(ベクトル)を合成したものの大きさである。

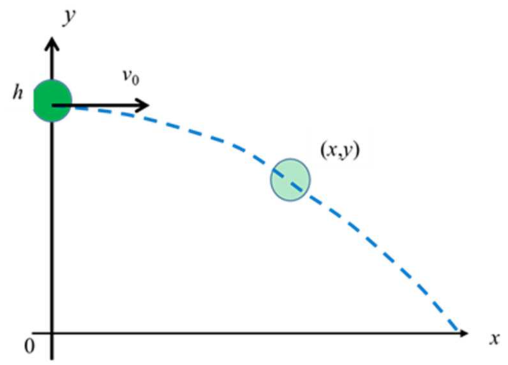
解答: (1) 問題文より加速度が α [m/s²] であることと初速 0 m/s であることから

時刻 t における回転の速さ $v=\alpha t$ [m/s]

(2) 加速度の大きさは、円の接線方向の α [m/s²]と向心方向の $\frac{v^2}{r}=\frac{(\alpha t)^2}{r}$ との合成

よって$\sqrt{\alpha^2+((\alpha t)^2/r)^2}=\frac{\alpha}{r}\sqrt{r^2+\alpha^2t^4}$ [m/s²]　(注意: 次元を確認せよ)

問題 4. 図のように、時刻 $t = 0$ において質量 m[kg]の小物体を地表 h [m]の高さの点から速さ v_0 [m/s]で水平方向に投げた。この小物体が地表に落ちるまでの運動を問う。ただし、地面に平行に x 軸、垂直に y 軸をとって小物体の位置を表す。また、空気の抵抗が、小物体の速度だけに比例するものとし、空気抵抗の比例係数を k、重力加速度の大きさを g とする。



(1) 時刻 $t \geqq 0$ における運動の x 成分と y 成分、それぞれの運動方程式を答えよ。

ヒント：運動においては x 方向(この問題では水平方向)の位置、速度、加速度と、y 方向（この問題では鉛直方向）の位置、速度、加速度を別の記号で表して扱うこと。

解答: x 方向は空気抵抗の力が運動と逆向きにはたらく: 運動方程式: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}$

なお $\frac{dx}{dt} = v_x$ で表して $m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x$ でもよい

同様に y 方向には重力と空気抵抗がはたらく:

運動方程式: $m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - k\frac{dx}{dt}$

なお $\frac{dy}{dt} = v_y$ で表して $m\frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y$ としてもよい

> ポイント
> (空気)抵抗は、運動と逆向きに働く
> 物体が落下するとき、$v_y < 0$
> 空気抵抗(f とする)は上向き
> だから $f = -kv_y$ とすれば、＋方向の力（上向き）を表す！

(2) 時刻 $t \geqq 0$ におけるこの物体の速度の x 成分 v_x と y 成分 v_y を表すそれぞれの式を答えよ。

解答: (1)の式を解く。

速度の x 成分 v_x ： $\frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}$ 両辺を t で積分 $\int \frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt}dt = \int -\frac{k}{m}dt$

これより $\log v_x = -\frac{k}{m}t + C$ (C は積分定数) となるので $v_x = C'\exp(-\frac{k}{m}t)$ （ここで $C' = \exp(C)$ ）

初期条件 $v_x(0) = v_0$ であるから、$C' = v_0$ $\therefore v_x = v_0\exp(-\frac{k}{m}t)$ [m/s]

速度の y 成分 v_y ： $m\frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y = -k(v_y + mg/k)$ から $\frac{1}{v_y+mg/k}\frac{dv_y}{dt} = -\frac{k}{m}$

両辺を時間 t で積分 $\log(v_y + mg/k) = -\frac{k}{m}t + C$ (C は積分定数)

これより $v_y + \frac{mg}{k} = C'\exp(-\frac{k}{m}t)$ （ここで $C' = \exp(C)$ ）

初期条件 $v_y(0) = 0$ であるから $C' = \frac{mg}{k}$ $\therefore v_y = \frac{mg}{k}(\exp(-\frac{k}{m}t) - 1)$ [m/s]

(3) h がとても大きい場合は地表面に落ちることなく運動が続く。その状況において、とても長い

時間がたった時の速度（終速度）を答えよ。

(2) の答に対しての極限値を考える

x 方向: $\lim_{t\to\infty} v_x = \lim_{t\to\infty} v_0 \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) = 0$ [m/s]

y 方向: $\lim_{t\to\infty} v_y = \lim_{t\to\infty} \frac{mg}{k}(\exp(-\frac{k}{m}t) - 1) = -\frac{mg}{k}$ [m/s]