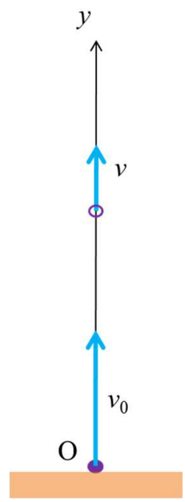
学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

前提知識: わからなければ教科書で調べること　運動方程式、微分方程式、円運動、重力

以下では、重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。

問題 1. 時刻 t=0 において、質量 m[kg]の小物体を地上から速さ v_0[m/s]で真上に投げ上げた。地表から鉛直上方に y 軸を取り、小物体の位置を表すものとする。なお、時刻 t=0 での小物体の位置を y = 0 とし、空気の抵抗は無視できるとする。

この小物体が<u>投げあげられてから地表に落ちるまでの運動</u>を考える。



(1) 時刻 t における小物体の加速度($\frac{d^2y}{dt^2}$) を答えよ。簡単な説明もつけること。

解答: 空気抵抗は無視できるので、この物体にはたらく力は重力のみだから

$$m\ \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \qquad \therefore\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad [\mathrm{m/s^2}]$$

(2) 時刻 t における小物体の速度($\frac{dy}{dt}$) を答えよ。簡単な説明もつけること。

解答: (1)から $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$

これを時間で積分、初期条件(t=0 での値)から $\frac{dy}{dt} = -gt + v_0$ [m/s]

(3) 時刻 t における小物体の位置(y) を答えよ。簡単な説明もつけること。

解答: (2)で求めた速度を t で積分、t=0 での位置(y=0)から $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ [m]

(4) (3)の式で y=0 として t の値を求めることにより、この小物体が地表に落ちる時刻を求めよ。

解答: (3)の式において y=0 の解を求める : $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t = 0$

これより t=0, $\frac{2v_0}{g}$ ∴地表に落ちる時刻 $t = \frac{2v_0}{g}$ [s]

(5) (2)の式で$\frac{dy}{dt}$ =0 を満たす t の値から、この小物体が到達する最高点の位置を求めよ。

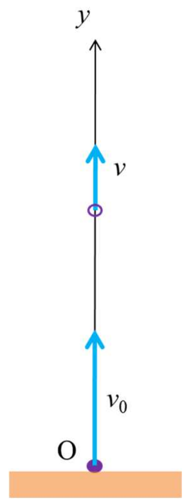
解答: $\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 = 0$ より、$t = \frac{v_0}{g}$ [s] で最高点に到達. この値を(3) に代入して最高点の位置

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{g} = \frac{{v_0}^2}{2g} \quad [\mathrm{m}]$$

別解: 高校物理の知識 : $v_1^2 - v_0^2 = 2ax$ において $a = -g$, v_1=0, v_0=v_0 から x を求める

問題 2. 一様な重力と**速度に比例した空気の抵抗** (<u>質量にはよらない</u>、空気抵抗の比例定数は k とする)を受けて点 O から速さ v_0[m/s]で鉛直上向きに投げ上げられた質量 m[kg]の小物体 A の t 秒後の速度、位

置、および $t\to\infty$ での速度(終速度)を求めたい。ただし点 O を原点とし、鉛直上方に y 軸を取るものとする。



(1) 小物体 A の運動方程式を書け(y 軸方向のみでよい)

解答: 小物体にはたらく力は

重力 $-mg$

空気抵抗 $-kv$ (速度を v とする)

である。よって運動方程式: $m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-mg-kv$

もしくは $m\dfrac{dv}{dt}=-mg-kv$

(2) 初期条件(t=0 における小物体の位置と速度)を考慮して(1)の微分方程式を解け(時刻 t [s] ($t\ \geqq 0$) における速度と位置の式を答えよ)

解答: (1)から $m\dfrac{dv}{dt}=-mg-kv$

式の変形 $\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{k}{m}\left(v+\dfrac{m}{k}g\right)$

$$\frac{1}{v+\frac{m}{k}g}\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}$$

時間で積分 $\int\dfrac{1}{v+\frac{m}{k}g}\dfrac{dv}{dt}\mathrm{dt}=\int-\dfrac{k}{m}\mathrm{dt}$

$\log\left(v+\dfrac{m}{k}g\right)=-\dfrac{k}{m}t+\mathrm{C}$ (C は積分定数)

変形 $v+\dfrac{m}{k}g=\exp\left(-\dfrac{k}{m}t+C\right)=\mathrm{C'}\exp\left(-\dfrac{k}{m}t\right)$ ただし C'=exp(C)

初期条件 t=0 で $v=v_0$ より、 $v_0+\dfrac{m}{k}g=C'$ だから

$v+\dfrac{m}{k}g=\left(v_0+\dfrac{m}{k}g\right)\exp\left(-\dfrac{k}{m}t\right)$

書き直し $v=-\dfrac{m}{k}g+\left(v_0+\dfrac{m}{k}g\right)\exp\left(-\dfrac{k}{m}t\right)$ [m/s]

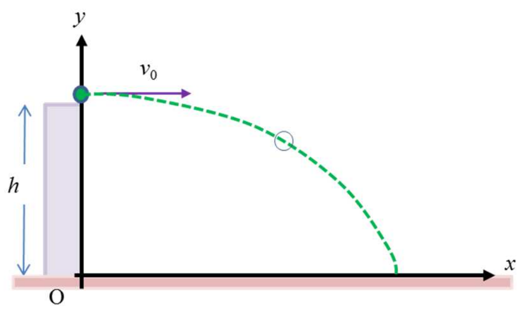
(3) (2)で求めた速度の式において、$t\to\infty$ とした極限値を答えよ。

解答: (2)から $v=-\dfrac{m}{k}g+\left(v_0+\dfrac{m}{k}g\right)\exp\left(-\dfrac{k}{m}t\right)$

$t\to\infty$ の極限値は (exp(-∞)=0 により)

$-\dfrac{m}{k}g$[m/s]

問題 3　時刻 t=0 において、質量 m[kg]の小物体を地表 h[m]の高さの点から速さ v_0[m/s]で水平方向に投げた。右図のように、地面に平行に x 軸、垂直に y 軸をとり、小物体の位置を表すものとする。この小物体が地表に落ちるまでの運動を考えよう。なお、空気抵抗は無視できるとする。



(1) 時刻 t における小物体の x 軸方向の加速度($\frac{d^2x}{dt^2}$) を答えよ

解答: 空気抵抗無視なので、x 軸方向の力は働かない、ゆえに 0 [m/s^2]

(2) 時刻 t における小物体の y 軸方向の加速度($\frac{d^2y}{dt^2}$) を答えよ

解答: 重力がはたらく。運動方程式 $m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$ より、$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$

(3) 時刻 t における小物体の x 軸方向の速度($\frac{dx}{dt}$) を答えよ

解答: (1)の解答を t で積分、初期条件（t=0 での x 軸方向の速さ v_0 ）から

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{[m/s]}$$

(4) 時刻 t における小物体の y 軸方向の速度($\frac{dy}{dt}$) を答えよ

解答:　(2)の解答を t で積分、初期条件（t=0 での y 軸方向の速さ 0）から$\frac{dy}{dt} = -gt$ [m/s]

(5) 時刻 t における小物体の x 軸方向の位置(x) を答えよ

解答:　(3) の解答を t で積分、初期条件(t=0 で x=0)を考慮して　$x = v_0 t$ [m]

(6) 時刻 t における小物体の y 軸方向の位置(y) を答えよ

解答:　(4) の解答を t で積分、初期条件(t=0 で y=h)を考慮して　$y = -\frac{1}{2}gt^2 + h$ [m]

(7) (6) の式から地表に小物体が落ちる時刻 t を求める。それにより、小物体が地表におちた x 軸方向の位置を求めよ。

解答:　(6)の式において、y=0 をみたす $t > 0$ を求めと $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ [s]

これを(5)の式 $x = v_0 t$に代入して $x = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$ [m]