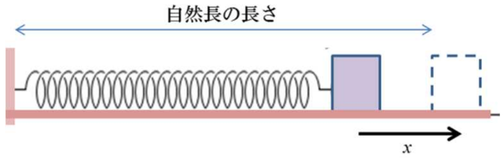
問題1.　水平面上に、ばね定数k [N/m]のばねの一端を壁に固定し、他端に質量m[kg]の小物体をおしつけ、長さをx[m]だけ縮めて放した。この水平面の動摩擦係数をμ'、空気抵抗は無視できるものとし、重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。



(1) ばねが自然長の長さになったときに、小物体はばねから離れる。それまでに小物体に対して摩擦がした仕事を答えよ。

解答：**ばねから離れる前の摩擦力の大きさは$\mu' mg$　これが距離 x[m]だけ働き、かつ小物体の動きと逆向きなので**
$-\mu' mgx$ [J]

(2) 自然長から x[m]縮めて押し付けられていた時のバネの弾性エネルギーを求めよ。この値と(1)の答えから、小物体がばねから離れるときの速さを求めよ。

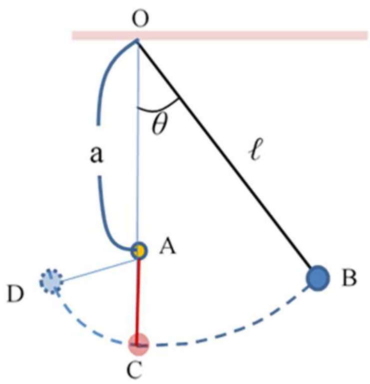
解答：x[m]縮めて押し付けられていた時のバネの弾性エネルギーは、$\frac{1}{2}kx^2$ [J]

バネが自然長の長さになった時、小物体がバネから離れる。このときの速さを v[m/s] とする。その時までに小物体は

$\frac{1}{2}mv^2$[J]のエネルギーを得、バネは、$\frac{1}{2}kx^2$[J]のエネルギーを失う。この差が物体が摩擦に逆らってする仕事$\mu' mg$に

等しいので、 $\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}mv^2=\mu' mgx$　　**が成り立つ。**　∴ $v=\sqrt{\frac{k}{m}x^2-2\mu' gx}$

問題 2. 右図のように、天井の一点 O から伸び縮みしない長さℓ の軽いヒモで質量 M の小物体をつるし、鉛直線とθをなす点 B まで引いてからこの小物体を放した。O の真下の距離 a（$0<a<\ell$） に釘 A があり、その真下に質量 m の小球を伸び縮みしない軽いひもでつるしている。小物体は A 点の真下の点 C で静止していた小球と衝突し、小球は D 点に到達した後、C 点に戻ってきた。ここで、空気抵抗は無視できるものとし、重力加速度の大きさを g とする。また小物体と小球との反発係数を e とする。



(1) C 点で小球に衝突する直前の小物体の速さ v を求めよ

解答：**C 点を位置エネルギーの基準にしたときの B 点の高さは** $\ell(1-\cos\theta)$

力学的エネルギー保存則より C 点における小物体の力学的エネルギーは B 点におけるそれと等しいので、

$$\frac{1}{2}M0^2+\ell(1-\cos\theta)Mg=\frac{1}{2}Mv^2+0Mg \quad \therefore v=\sqrt{2(1-\cos\theta)g\ell}$$

(2) 衝突直後の小球と小物体の水平方向の速度を v で表せ。ここで衝突直前の小物体の運動方向を正とする。

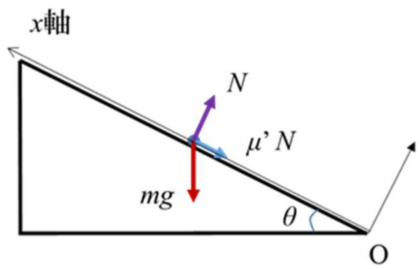
解答：衝突直後の小球の速度を V、小物体の速度を v'とおく。 反発係数の定義から $ev=V-v'$

また運動量保存則より、$mV+Mv'=Mv$　　これを解いて $V=\frac{(1+e)Mv}{M+m}$　　$v'=\frac{(M-em)v}{M+m}$

(3) $e=1, M=2m, \cos\theta=\frac{3}{4}$ とする。C点を基準としたときの D 点の高さ H を求めよ。

解答：$V=\frac{4}{3}v$、力学的エネルギー保存則$\frac{1}{2}MV^2=MgH$より、$H=\frac{4}{9}\ell$　(a の条件からこれは可能)

問題 3　右図のように水平方向と θ の角度をなす斜面があり、この斜面上の点 O に質量 m [kg]の質点を置いた。そして、初速 v_0 [m/s]を与えたところ、質点は摩擦力を受けながら、斜面にそってすべり上がった。ここで、重力加速度の大きさを g[m/s^2]、質点と斜面との動摩擦係数を μ'とする。点 O を原点にとり、斜面にそって上方向に x 軸、斜面に垂直上向き方向に y 軸を取って考える。空気抵抗は無視でき、また質点が斜面を上がり始めた時刻を t=0 とする。



(1) 斜面を上がっている質点に対してはたらく動摩擦力の大きさを m, g, θ、μ' だけを用いて表わせ。

解答：　**斜面から質点が受けている垂直抗力** $N = mg\cos\theta$ **より**

動摩擦力の大きさは $\mu' mg\cos\theta$

(2) 斜面を上がっている質点に対する x 軸方向の運動方程式を書け。

解答: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\mu' mg\cos\theta - mg\sin\theta$

(3) (2)の式と初速度を考慮して、斜面を上がっている質点の速度の式を求めよ。

解答:　**(2)の式を両辺** t **で積分し　初期条件** $v(0)= v_0$ **を代入して**

$v(t) = v_0 - g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)t$

(4) (3)から、斜面を上がっていた質点が停止する時刻を求めよ。

解答: 質点が停止する時刻 t は $v(t)=0$ を満たす

$\Rightarrow v_0 - g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)t = 0$　　$\therefore\ t = \dfrac{v_0}{g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)}$

(5) (3), (4)から、質点が斜面をあがった最高点の x 座標を求めよ。

解答: (3)の式を両辺 t で積分し、 初期条件 $x(0)= 0$ を代入して

$x(t) = v_0 t - \dfrac{g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)t^2}{2}$　　これに $t = \dfrac{v_0}{g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)}$ を代入して

停止した位置の x 座標 $= \dfrac{{v_0}^2}{2g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)}$

問題 4. 問題 3 を力学的エネルギーの観点から考える。ここで原点 O を位置エネルギーの基準点とする。

(1) 質点が斜面を上がり始めたときの質点の力学的エネルギーを求めよ。

解答 : $\frac{1}{2}m{v_0}^2$

(2) 質点が運動して x 座標が L[m]の場所にきたときの位置エネルギーを求めよ。

解答 : $mgL\sin\theta$

(3) 質点が運動して x 座標が L[m]の場所にきたときまでに動摩擦力がした仕事を求めよ。

解答: $-\mu' mgL\cos\theta$

(4) (2), (3)から質点が最高点に達した時の x 座標の値を(問題 3 とは別に)求めよ。

解答: : $\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgL\sin\theta + \mu' mgL\cos\theta$ より　$2Lg(\mu'\cos\theta + \sin\theta) = {v_0}^2$

よって　$L = \dfrac{{v_0}^2}{2g(\mu'\cos\theta + \sin\theta)}$