講義　物理「力学」講義内演習　　　　2019-05-27

前提知識: 角運動量、全角運動量変化則、剛体の運動方程式

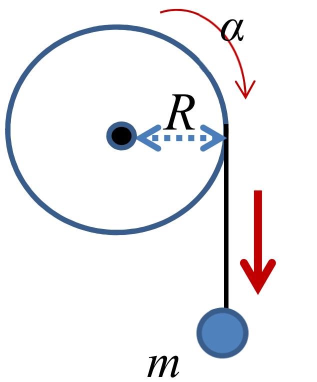
並進運動と回転運動の類似性

並進運動		回転運動	
速度	$v = \frac{dx}{dt}$	角速度	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度	$a = \frac{dv}{dt}$	角加速度	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
等加速度運動	$v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	等角加速度運動	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
質量	m	慣性モーメント	I
運動エネルギー	$K = \frac{1}{2}mv^2$	運動エネルギー	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
仕事	$W = \int F dx$	仕事	$W = \int \tau d\theta$
仕事率	$P=Fv$	仕事率	$P=\tau\omega$
運動量	$p=mv$	角運動量	$L=I\omega$
力と運動量	$F = \frac{dp}{dt}$	トルク（力のモーメント）と角運動量	$\tau = \frac{dL}{dt}$

問題 1.

右図のように、摩擦のない軸まわりに、自由に回転できる半径 R=0.10m、質量 M=1.0kg の滑車にひもを巻き付け、ひもの下端に質量 m=0.50kg のおもりをつけて手をはなす。

ただし滑車は質量が一様な円板とみなせ,軸まわりの慣性モーメント$I = \frac{1}{2}MR^2$とする。



(1) 滑車の角加速度を α[rad/s^2]、慣性モーメントを I [kg・m^2]、おもりの加速度を a[m/s^2], ひもの張力を T[N]として、滑車とおもりの運動方程式をそれぞれかけ。。

[解]　滑車:　剛体の運動方程式　　$I\alpha = RT$

おもり:　運動方程式　　　$ma = mg - T$

(2) 滑車の角加速度 α[rad/s^2]を求めよ。なお重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする(以下の問も同じ)。

[解]　$a=\alpha R$ に注意して、(1)の式を解く　$\propto = \frac{2mg}{(M+2m)R}$

数値を代入して、 49 rad/s^2

(3) おもりの加速度 a を求めよ

[解]　$a=\alpha R$ と(2)の解から　a=4.9 m/s^2

(4) 張力 T を求めよ。

[解]　(1)より$T=m(g-a)$、(3)の解から　T=2.5N (有効数字 2 桁)

問題 2. 原点を中心に質量 3.0kg の質点が、角速度 2.0rad/s で半径 10m の円運動をしている。この質点がもつ角運動量の大きさを答えよ。

[解]

慣性モーメントを I [kg・m^2]、角速度を ω[rad/s]で表すと、角運動量 $L=I\omega$ である。

ここで、I=3.0×10^2 kg・m^2、 ω=2.0 rad/s であるから、角運動量 L=6.0×10^2 kg・m^2/s (rad は無次元)

問題 3. 滑りのない転がり運動をしている質量 M で半径 R の円柱の全運動エネルギーは、同じ質量の質点の運動エネルギーの何倍になるか答えよ。ただし、円柱の質量中心まわりの慣性モーメントは$\frac{1}{2}MR^2$であり、質点の運動の速さは転がり運動をしている円柱の重心位置の速さと等しいとする。

[解]

滑りのない転がり運動をしている質量 M で半径 R の円柱の全運動エネルギーは回転エネルギーと並進エネルギーの和である。

角速度を ω[rad/s]とすると、円柱の質量中心まわりの慣性モーメントは I=$\frac{1}{2}MR^2$であり、重心位置の速度

v=$R\omega$[m/s]であるから、全運動エネルギーは$\frac{1}{2}I\omega^2+\ \frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}M(R\omega)^2\ =\ \frac{1}{4}MR^2\omega^2+\frac{1}{2}M(R\omega)^2=$

$\frac{3}{4}\ MR^2\omega^2$ である。

それに対し同じ質量の質点の運動エネルギーは質量 M、速さ v=$R\omega$ を用いて $\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}M(R\omega)^2$

ゆえに 円柱の全運動エネルギーは、同じ質量の質点の運動エネルギーの$\frac{3}{2}$倍

問題 4. 静止している質量が M で半径が R の一様な球体が水平と角度 30°をなす斜面を転がり落ちた。斜面の下端に達した時の質量中心の加速度の大きさを求めよ。ただし球体は滑らず、球体の質量中心まわりの慣性モーメントは$\frac{2}{5}MR^2$である。なお重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

[解]

斜面に沿って上方に働く摩擦力をFとすると、教科書例題 15.4 より、

重心の運動方程式: $M\frac{d^2x}{dt^2}$=$Mg\sin30^\circ$ — F

中心軸まわりの回転の運動方程式は、円柱の慣性モーメントが$\frac{2}{5}MR^2$であるから、 $\frac{2}{5}MR^2\frac{d\omega}{dt}$ = RF

斜面を滑らずに回転することから $\frac{d^2x}{dt^2}$= $R\frac{d\omega}{dt}$

これを解くと、$\frac{d^2x}{dt^2}$=$\frac{5}{7}g\sin 30^\circ$ ＝ $\frac{5}{14}g$ = 3.5 m/s^2