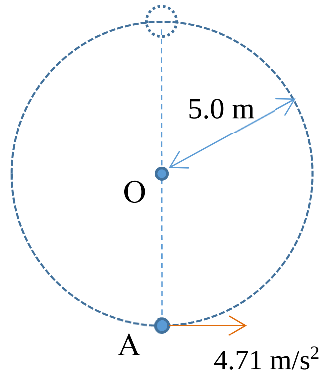
講義　物理「力学」宿題(締切:10 月 9 日(水)午後 6 時、11 号館 6 階 EV ホール)　　2019-10-04

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　**氏名**＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 1　なめらかな水平面内を、点 O を中心として小物体 A が等速円運動している。回転半径を 5.0 [m]，A の速さは 4.71 [m/s] 、円周率を 3.14 とする。以下の問いに答えよ。　教科書 5.3 等速円運動 (p.66)



(1) A は 2.0 s 間にどのくらいの距離を進むか、答えよ。

答:　A の速さは 4.71 m/s だから, 9.4 m (有効数字 2 桁)

(2) A は 2.0 s 間に何回転するか、答えよ。

答:　2.0 s 間に進む距離を円周 2π×5.0 で割れば良い：0.30 回転

(3) A の角速度を、単位を含めて答えよ。

答: 1.0 s 間の回転角を計算すれば良い：2π×4.71/(10π) = 0.942 ≒ 9.4×10^{-1} rad/s

(4) A の周期を、単位を含めて答えよ。

答: (3)の角速度から 2π/0.942 ≒ 6.7 s　なお、(2)の答（2.0s の回転数）からも求められる

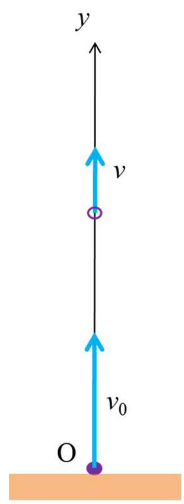
(5) A の向心加速度を、単位を含めて答えよ。

答:　向心加速度は「速さ×角速度」であるから、4.71×0.942 = 4.43682 ≒ 4.4 m/s^2

問題 2. 質量 m[kg]の小物体 A が地表上の点 O から速さ v_0[m/s]で鉛直上向きに投げ上げられた。A が投げ上げられてから t 秒後(ただしその時点では A は O 点もしくは空中にあるとする)の A の鉛直方向の速度と位置を求めたい。ただし点 O を原点とし、鉛直上方に y 軸を取るものとする。また A は重力加速度の大きさ g [m/s^2]の一様な重力と、**速度に比例した空気の抵抗**(空気抵抗の比例定数は k とする)とを受けて運動するものとする。

(1) 小物体 A の y 軸方向の運動方程式を書け。ここで$v(t) = \frac{dy}{dt}$ を用い、また$v(t)$を v と略してもよい。

$\boxed{\text{教科書 問 23　(p.88)}}$



答:　$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - k\frac{dy}{dt}$$

または　$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

(2) 初期条件(t=0 における小物体の位置と速度)を考慮して(1)の微分方程式を解け(時刻 t [s] (t ≧0)における速度と位置の式を答えよ)

答:　$\frac{dy}{dt} = v$ とおくと、(1)は $\frac{dv}{dt} = -\left(g + \frac{k}{m}v\right) = -\frac{k}{m}\left(v + \frac{mg}{k}\right)$ と書き換えられる

$\frac{1}{v+\frac{mg}{k}}\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}$ 両辺を t で積分：$\log\left(v + \frac{mg}{k}\right) = -\frac{k}{m}t + C$ より $v + \frac{mg}{k} = C'\exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$

t=0 のとき v= v_0から、$v_0 + \frac{mg}{k} = C'$　∴ $v = \frac{dy}{dt} = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) - \frac{mg}{k}$

両辺を t で積分：$y = -\frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) - \frac{mg}{k}t + C$　　t=0 のとき y=0 から

$$\therefore\ y = \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right) - \frac{mg}{k}t$$

問題 3. 以下では重力加速度の大きさを g [m/s^2] とせよ。なお、$a > 0$ とし、空気抵抗は無視できるとする。

教科書 10.1 並進座標系での運動法則 (p.121 -125)

(1) 鉛直上方に加速度 a [m/s^2]で等加速度運動しているエレベータにおいて、天井から質量 m [kg] のおもりが糸でつるされているとき、糸の張力を求めよ。ただしその考え方について解説をつけること。

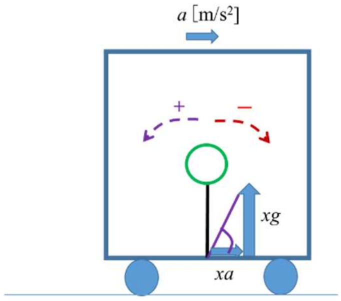
答: 加速度 a [m/s^2]で上昇中であるから、エレベータ内のおもりには、重力$-mg$[N]と見かけの力 $-m\,a$[N]がはたらいている。ゆえに、糸の張力は $mg+m\,a=m(g+a)$ [N]

(2) 水平面上の直線上を加速度 a [m/s^2]で等加速度運動している電車において、天井から質量 m [kg] のおもりが糸でつるされているとき、糸の張力を求めよ。ただし解説をつけること。

答: 加速度 a [m/s^2]で直線上を等加速度運動しているので、おもりには、鉛直下向きに重力$-mg$[N]と、水平面内で電車の進行方向逆向きに見かけの力 $-m\,a$[N]がはたらいている。

よって、糸の張力はこの合力と等しい。$\therefore \sqrt{(mg)^2+(ma)^2} = m\sqrt{g^2+a^2}$ [N]

(3) 水平面上の直線上を加速度 a [m/s^2]で等加速度運動している電車において、周囲の空気よりもはるかに軽いバルーンが床から糸でつながれているとき、床と糸のなす角度を求めよ。ただし糸の質量とバルーンの質量は無視できるものとする。また鉛直上方向を 0 度、進行方向をマイナス、進行方向と逆方向をプラスの角度とする。そうなる理由も述べること。



答: これは⑵と似た状況であるが、重力に由来する浮力は鉛直上向き、かつ見かけの力が「水平面内で電車の進行方向と同じ向きに」働くという違いがある。バルーンの場合、周りの空気よりも軽いため、浮力の原理が働く（周囲の空気から押し上げられる力）

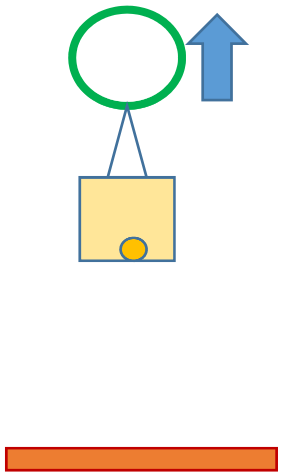
よって鉛直上方、進行方向であるため $-\arctan(g/a)$

(注：右図で x とあるのはバルーンと同体積の空気の質量とバルーンの質量の差)

問題 4. 積み荷を含めて全体の質量 264kg の気球が鉛直上方に運動している。重力加速度を 9.8 m/s^2 として以下の問いに答えよ。

(1) この気球が一定の加速度 α [m/s^2]で上昇しているとき、この気球内で質量 14kg の砂袋をばねばかりで計ると、見かけ上 15kg となった。α はいくらか？

答: 前問⑴より $14\times(9.8+\alpha)= 15\times 9.8$ $\therefore 14\alpha=9.8$ $\alpha=0.70$ m/s^2



(2) この気球が一定の速度 β [m/s]で上昇しているとき、地上からの高さ 100m において質量 14kg の砂袋を気球から静かに落としたところ、5.0 s 後に砂袋は地面に達した。砂袋を落とした時の気球の速さを求めよ。

答: 重力加速度の大きさを g[m/s^2]，求める速度を β [m/s]（上向きを正）落とした点を原点にとって考える。位置 x[m]，落下に要する時間を t[s]として

$x = x_0 + \beta t + \frac{1}{2}gt^2$ が成り立つので、与えられた数値を代入して

(高度100mの地点を原点にとる---地表は-100m の場所)

$-100=\beta\times 5.0+\frac{1}{2}\times(-9.8)\times 5.0^2$ $\therefore \beta=-20+24.5 = 4.5$ m/s

(3) (2)において砂袋を鉛直下方に勢いをつけて落とす場合、直後の気球の速さにどのような違いがあるか、それとも変わらないだろうか。

答: 運動量保存が成り立つ。速度は上向きを正とする。

砂袋を落とす前の気球の運動量は 264 β

砂袋を落とした直後の気球の速度を v [m/s], 砂袋を落とす相対速度を γ[m/s] とすれば、

$$(264 - 14)v + 14(\beta - \gamma)$$ (砂袋には完成の法則が働くため)

これが等しいので、 $250 \times 4.5 + 14 \times \gamma = 250v$

これから $\gamma > 0$ とすれば $v > 4.5$ である。

∴落とすことによって気球の速度は大きくなる