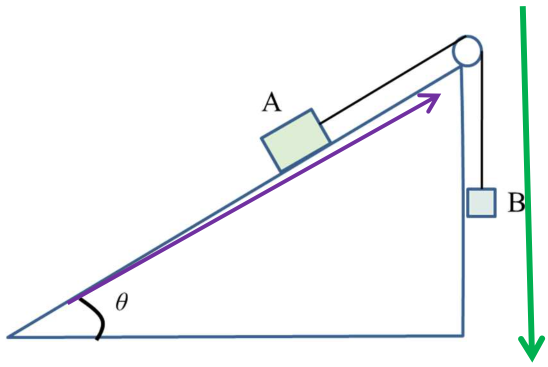


問題1. 右図のように軽い伸び縮みしない糸の一端に質量 m [kg]の小物体 A をつなぎ、傾角 θ の斜面におき、軽い滑らかな滑車を経て質量 M[kg]の小物体 B をつるした。空気の抵抗は無視できるものとし、重力加速度の大きさを g [m/s^2]とせよ。

(1) 斜面が滑らかであったとき、A は斜面を滑り上がった。このときの A の加速度を、運動方程式を立ててから求めよ。

解: B も A も同じ加速度で動く。求める加速度を a [m/s^2], 糸の張力を T[N]とおく。

運動の方向に軸をとり、運動の向きを「正」とするのが一般的によい方法　教科書 6章(p.73-81)

A について、斜面平行に x 軸をとり上向きを正とすると、運動方程式: $ma = T - mg\sin\theta$

B について、鉛直方向に x 軸を取り、下向きを正とすると、運動方程式: $Ma = Mg - T$

これから、$(M+m)a = (M - m\sin\theta)g$

$$\therefore\ a = \frac{(M - m\sin\theta)g}{M+m}\ [\mathrm{m/s^2}]$$

別解: A と B を一体とみなし、運動方程式をたてると $(M+m)a = (M - m\sin\theta)g$

(2) (1)の状況で、A が斜面に沿って L[m]上ったところで糸が切れた。このときの A の速さを求めよ。

解: A が動き始めた時刻を 0 とし、L[m]上るのにかかった時間を t [s]とすると、$\frac{1}{2}at^2 = L$ これから $t = \sqrt{2L/a}$ [s]

求める速さは at [m/s] と表せるので、$at = \sqrt{2aL} = \sqrt{\frac{2L(M - m\sin\theta)g}{M+m}}$ [m/s]

別解:求める速さを v[m/s]とおくと、 公式から $v^2 - 0^2 = 2aL$ これを用いて解がえられる

(3) (1)とは異なり斜面が粗く、静止摩擦係数が μ 動摩擦係数が μ' であるとする。

(a) A、B とも静止するには μ はどのような大きさでなければならないか。式を立ててその条件を求めよ。

解: A にはたらく静止摩擦力の大きさを F[N]とする。

A が静止しているためには、張力の大きさを T[N]とすると、

$$F = T - mg\sin\theta$$

また、$Mg - T = 0$ であるから、$F = (M - m\sin\theta)g$

ここで、A にはたらく垂直抗力の大きさは、$mg\cos\theta$ であることから、

$F \leqq \mu mg\cos\theta$　　ゆえに、$(M - m\sin\theta)g \leqq \mu mg\cos\theta$

よって、$\frac{M - m\sin\theta}{m\cos\theta} \leq \mu$　　別解: A と B をひとまとめにして考えると $Mg \leqq m\sin\theta)g + \mu mg\cos\theta$ が導ける

(b) 摩擦があるにもかかわらず A、B とも動き出したとする。このときの加速度を求めよ。説明もつけよ。

解: 求める加速度を a [m/s^2]とする。

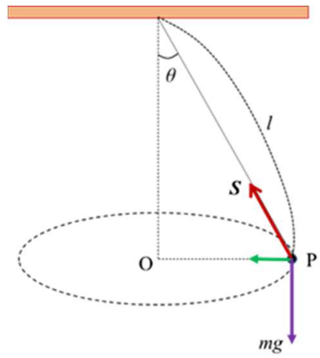
A について、斜面平行に x 軸をとり上向きを正とすると、運動方程式: $ma = T - mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta$

B について、鉛直方向に x 軸を取り、下向きを正とすると、運動方程式: $Ma = Mg - T$

よって、$(M+m)a = (M - m\sin\theta - \mu' m\cos\theta)g$　　$\therefore a = \frac{(M - m\sin\theta - \mu' m\cos)g}{M+m}$ [m/s^2]

別解: A と B をひとまとめにして考えると $(M+m)a = (M - m\sin\theta - \mu' m\cos\theta)g$ が導ける

問題2. 天井から長さl [m]の軽くて伸びない糸をたらし、その先に質量 m [kg]のおもりをつけ、糸を鉛直下方からθだけ傾けながら、おもりを水平面内で等速円運動させた。ここで、重力加速度の大きさをg [m/s^2]とし、空気の抵抗は無視できるとする。



教科書 8.1(p.93-96)

(1) おもりにはたらく鉛直方向の力のつり合いの式から張力 S の大きさを求めよ。

答: $S\cos\theta = mg$ よって、$S = \frac{mg}{\cos\theta}$ [N]

(2) おもりが円運動することから、円運動の速さを v[m/s] とおいて、おもりにはたらく向心力の大きさを求めよ。

答: 回転半径を r[m]とすると、公式より向心力の大きさは $\frac{mv^2}{r}$[N]

$r = l\sin\theta$ より、$\frac{mv^2}{l\sin\theta}$ [N]

(3) (2)で求めた向心力は張力 S [N]の水平方向の成分が向心力と等しいことから、円運動の速さ v[m/s]を求めよ。

答: $S\sin\theta = \frac{mv^2}{l\sin\theta}$ と $S = \frac{mg}{\cos\theta}$ より、$v^2 = g\,l\sin\theta\tan\theta$

$\therefore\ v = \sqrt{g\,l\sin\theta\tan\theta}$ [m/s]

(4) 円運動の速さと円運動の半径から、円運動の周期を求めよ。

答: (3)より $v = \sqrt{rg\tan\theta}$ また周期 $T = \frac{2\pi r}{v}$ [s] $\therefore T = \frac{2\pi r}{\sqrt{rg\tan\theta}} = 2\pi\frac{\sqrt{l\sin\theta}}{\sqrt{g\tan\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\theta}$ [s]

問題 3. 質量 M[kg]の自動車が、半径 R[m]の円形をした水平な道路上を速さ v[m/s]で走っている。重力加速度の大きさを g[m/s^2]として以下の問いに答えよ。

(1)この車に作用している向心力を求めよ。

答:向心力は円の中心に向き、$\frac{v^2}{R}$ の加速度を与える。自動車の質量が M[kg]であるから、

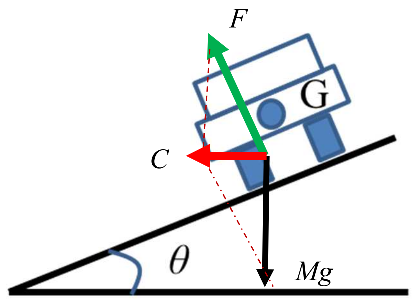
向心力の大きさは $\frac{Mv^2}{R}$ [N]

(2) 車輪と路面との静止摩擦係数を μ とすると、この円形の道路をすべらずに走れる最大の速さを求めよ。

答: 自動車に対する垂直抗力は Mg [N]であるから、$\mu Mg \geqq \frac{Mv^2}{R}$ であればすべらない。

$\therefore \sqrt{\mu Rg}$ [m/s]

(3) この道路に勾配をつけ、規定の速さ v[m/s]で走れば、車が路面から横向きの力を受けずにすむようにしたい。
右図がその条件をみたしているとして、車が受ける重力 Mg、路面から受ける力 F、およびこれらの二力の合力 C を図に書き込め。ここでこれらの力の始点はすべて車の重心 G とする。



(4) 上の条件を満たす路面の勾配 θ を求めよ。

答: $C = \frac{Mv^2}{R}$ また図から $C = Mg\tan\theta$ $\therefore\ \tan\theta = \frac{v^2}{gR}$ よって $\theta = arctan\frac{v^2}{gR}$