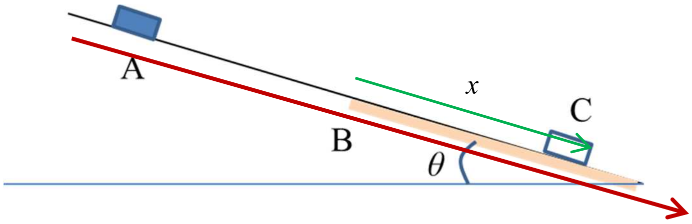
注意;問題はまずノートなどで解き、この用紙にはそれを「清書」して出すこと。字は丁寧にはっきり書くこと。



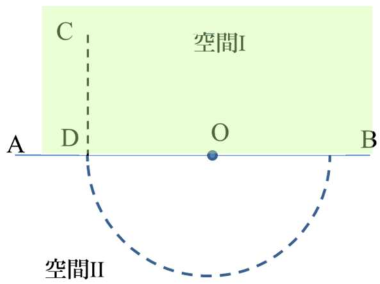
問題1. 水平面と角 θ をなす斜面があり、斜面の B 点より上側は滑らかで、下側は動摩擦係数 μ をもつ面となっている。B 点の上方に、斜面に沿って距離 ℓ [m]の点 A から質量 m[kg]の小物体を静かに放すと、小物体は斜面上をすべり、B 点の下方の斜面に沿って B から x[m]の距離にある C 点で静止したとする。重力加速度の大きさを g[m/s^2]として、x を $\tan\theta$ の関数として求めよ。

答: 斜面に沿って軸をとり下向きを正と考える A-B 間は小物体は $g\sin\theta$ の加速度ですべり下りる。 B 点での速さを v[m/s]とすると、摩擦がないため、$v^2=2\ell g\sin\theta$ から $v=\sqrt{2\ell g\sin\theta}$ [m/s] となる。動摩擦係数が μ であるから、BC 間の動摩擦力は $\mu mg\cos\theta$[N]. これから BC 間は$(\sin\theta - \mu\cos\theta)g$ [m/s^2]の加速度が斜面に沿って働く(C 点で停止したことからこれは負の加速度といえる)。よって、$0^2 - v^2 = 2x(\mu\cos\theta - \sin\theta)g$

が成り立つ。∴ $x = \dfrac{\ell\sin\theta}{(\mu\cos\theta-\sin\theta)} = \dfrac{\ell\tan\theta}{\mu-\tan\theta}$ [m]

別解:「位置エネルギーの差＝摩擦力がした仕事」により、$mg(\ell+x)\sin\theta=\mu mgx\cos\theta$　この式から求まる

問題 2. 平面板 AB によって空間が空間 I と空間 II に分けられているものとする。直線 CD は AB に垂直で、D は板 AB にあいた小さな穴である。$\overline{\mathrm{CD}}=s$[m]とする。最初 C の位置に m[kg]の質点が静止しており、空間 I ではこの質点に一定の大きさ f [N]の力が常に AB に垂直な方向に作用する。このため、この質点は直線 CD に沿って運動し、穴 D をある速さで通過する。この質点が穴 D を通過した後、つまり空間 II においては、空間 I とは異なる力が作用し、その結果、半径 OD= r [m]の等速円運動をする。以下の問に答えよ。(注意:重力は無視できるとする)



(1) 空間 I におけるこの質点の加速度を求めよ。

答: 加速度の大きさを a [m/s^2] とすると、$ma=f$ から、 $a=\dfrac{f}{m}$ [m/s^2]

(2) 質点が C から D に達する時間を求めよ。

答: 求める時間を t [s] とおくと、$s=\frac{1}{2}at^2$　∴ $t=\sqrt{\dfrac{2s}{a}} = \sqrt{\dfrac{2sm}{f}}$ [s]

(3) 質点が D を通過する時の速さを求めよ。

答: 速さを v[m/s]とおくと、$v=at=\dfrac{f}{m}\sqrt{\dfrac{2sm}{f}} = \sqrt{\dfrac{2sf}{m}}$ [m/s]

別解:$v^2-0^2=2as$ を用いる

(4) 空間 II における質点の加速度とその方向を答えよ。

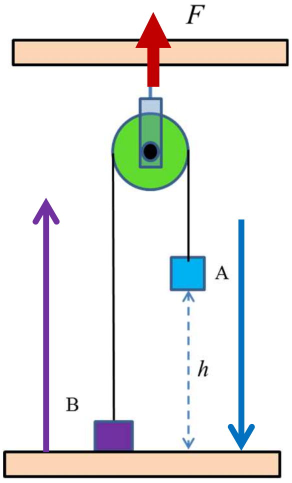
答: 等速円運動するのだから、加速度の大きさは(3)の速さ v[m/s]:を用いて $\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{2fs}{rm}$ [m/s^2]

向きは円の中心 O に向かう方向

(5)空間 II において質点に作用する力の大きさとその方向を答えよ。

答: 円運動するのだから向心力がはたらく。円の中心 O に向かう方向、大きさは(4)の答から$\dfrac{2fs}{rm}m = \dfrac{2fs}{r}$ [N]

問題 3. 右図のように滑車に軽く伸び縮みしない糸をかけ、その両端に質量 M[kg]の小物体 A と質量 m[kg]の小物体 B をつるす。B は地上にあり、A は地上から高さ h[m]のところにある。滑車は軽く摩擦はないものとし、$M > m$、重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。小物体 A を静かに放して落下させる時、次の問いに答えよ。



注意:静止状態とは状況が異なる

(a) 小物体 A をつるしている糸の張力 T[N]を求めよ。

答: A については鉛直方向に軸をとり下向きを正とする:

A の運動方程式(加速度を a[m/s^2]とする) $Ma = Mg - T$

B についても鉛直方向に軸をとるが上向きを正とする:(運動の方向を『正』)

B の運動方程式(加速度は a[m/s^2]) $ma = T - mg$

∴ $T = 2Mmg/(M+m)$ [N]

(b) 滑車をつるしている糸の張力 F[N]を求めよ。

答: 滑車には両方に T[N]の力がかかっているので、$F=2T=4Mmg/(M+m)$ [N]

(c) 小物体 A の加速度 a [m/s^2]を求めよ。

答: (a)から、$a = (M-m)g/(M+m)$ [m/s^2]

別解: A と B を一体(系)とみなして運動方程式 $(M-m)g = (M+m)a$ ∴ $a = (M-m)g/(M+m)$ [m/s^2]

これを先に解いてから(a)の張力 T を求めてもよい

(d) A が地面に達する瞬間の速さ v[m/s]を求めよ。

答: 公式から、$v^2 - 0^2 = 2ha$ $v^2 = 2h(M-m)g/(M+m)$ ∴ $v = \sqrt{\frac{2gh(M-m)}{M+m}}$

(e) A を放してから地面に達するまでの時間 t [s]を求めよ。

答: 公式から、$h = \frac{1}{2}at^2$ ∴ $t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h(M+m)}{(M-m)g}}$ [s]

(f) B が達する最高点の地面からの高さ H[m]を求めよ。

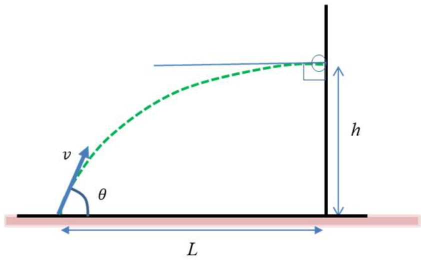
答: A が地面に到達したとき B は地面から h[m]のところにある。その地点から速さ v[m/s]で投げ上げされたと考えれば良い。 $0^2 - v^2 = -2(H-h)g$ となるので、$H - h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\frac{2gh(M-m)}{M+m} = \frac{h(M-m)}{M+m}$ [m]

∴ $H = h + \frac{h(M-m)}{M+m} = \frac{2hM}{M+m}$ [m]

(g) B が高さ h[m]の点を通過してから、最高点を経て、再び高さ h[m]の点を通るまでの時間 t' [s]を求めよ。ただし A は地面に到達した後、静止しているものとする。

答: 高さ h[m]の点から最高点 H[m]に到達するまでの時間を T[s]とおくと(注意: 実際に求めているのは最高点から高さ h の地点への自由落下) $\frac{1}{2}gT^2 = H - h = \frac{h(M-m)}{M+m}$

よって $T = \sqrt{\frac{2h(M-m)}{(M+m)g}}$ [s] $t'=2T$ であるから、$t' = 2\sqrt{\frac{2h(M-m)}{(M+m)g}}$ [s]



問題 4. 水平な地面に鉛直に立っている壁をめがけて、仰角$\theta = \frac{\pi}{4}$ 、速さ v =20m/s でボールを投げたところ、ボールは壁に垂直に当たった。壁に当たった点の地面からの高さ、および投げた地点と壁までの水平距離を求めよ。ただし空気抵抗は無視でき、重力加速度の大きさを 10m/s^2 として計算せよ。

答: 問題文から、

水平方向の初速は $v\cos\theta = 10\sqrt{2}$ m/s

鉛直方向の初速は $v\sin\theta = 10\sqrt{2}$ m/s　である。

ボールを投げた時刻を t=0 とする。まず鉛直方向の運動を考える。時刻 t 秒後($t \geqq 0$)の鉛直方向の速度を V とすると(上向きを正とする)、ボールの働く力は重力のみなので、重力加速度の大きさを g [m/s^2]で表すと、

$\frac{dV}{dt} = -g$　これと初速から $V = -gt + 10\sqrt{2}$ ―― (1)

ボールの地面からの高さを y[m]で表すと、

$\frac{dy}{dt} = V = -gt + 10\sqrt{2}$　から　$y = -\frac{1}{2}gt^2 + 10\sqrt{2}t = -5.0t^2 + 10\sqrt{2}t$ [m] ―― (2)

水平方向の運動を考える。水平方向は等速度運動していると考えられる。ボールをなげた地点からの距離を

x[m]とすると　$\frac{dx}{dt} = 10\sqrt{2}$　から $x = 10\sqrt{2}t$ [m] ―― (3)

ここで壁に垂直に当たった時刻を T[s]とすれば、これは「鉛直方向の速度=0」となる時刻でもある。したがって

(1)から　$0 = -gT + 10\sqrt{2}$　これから $T = \sqrt{2}$ s

(2)に代入して、ボールが壁に当たった点の高さは　$-5.0\left(\sqrt{2}\right)^2 + 10\sqrt{2}\sqrt{2} = -10 + 20 = 10$ m

(3)に代入して、投げた地点と壁までの距離は　$10\sqrt{2}\sqrt{2} = 20$ m