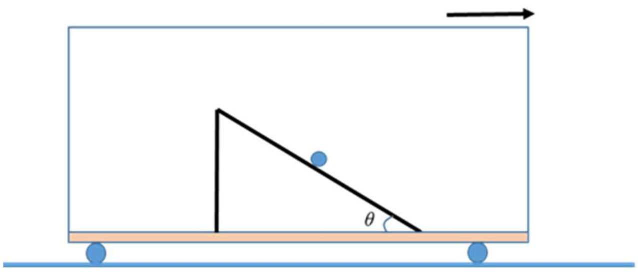
学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　**氏名**＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

注意;問題はまずノートなどで解き、この用紙にはそれを「清書」して出すこと。字は丁寧にはっきり書くこと。

問題 1. 水平面上の直線の上を運動している電車がある。

その中に図のように水平面と角 θ をなす斜面を作り、粗い斜面の上に小物体 A を置いた。重力加速度の大きさを g[m/s^2]、斜面と小物体 A との静止摩擦係数を μ として以下の問いに答えよ。



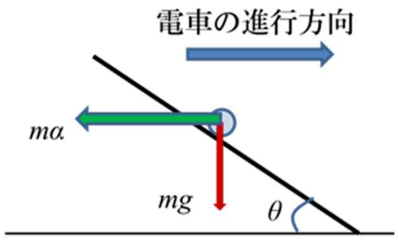
(1) 電車が**等速度運動**しているときに、A が斜面に対して相対的に静止しているための θ と μ との関係を求めよ。

解答: 斜面上の小物体 A にはたらく力は、鉛直下向きの重力(mg)、斜面からの垂直抗力(mg の斜面に垂直な方向の分力と釣り合う、つまり $mg\cos\theta$)、斜面からの静止摩擦力(mg の斜面に並行な方向の分力と釣り合う、つまり $mg\sin\theta$)だけである。A が静止するには、静止摩擦力が最大静止摩擦力 $\mu mg\cos\theta$ 以下であればよいので、

$$mg\sin\theta \leqq \mu mg\cos\theta$$

よって、 $\tan\theta \leqq \mu$

(2) 図に示した方向に電車が**等加速度運動**している。加速度の大きさを a[m/s^2] ($a > 0$)とすると、A が斜面を上るためには a はどのくらいの大きさでなければならないか。



解答: 斜面上の小物体 A にはたらく力は、(1)であげた力以外に、見かけの力 $m\alpha$ が電車の進行方向とは逆向き、水平方向にはたらく。従って、

斜面に垂直下向きの力: $mg\cos\theta + m\alpha\sin\theta = m(g\cos\theta + \alpha\sin\theta)$

斜面に並行上向きの力: $m\alpha\cos\theta - mg\sin\theta = m(\alpha\cos\theta - g\sin\theta)$

小物体 A は斜面を登り始めるには、斜面に並行上向きの力が最大静止摩擦力 $\mu m(g\cos\theta + \alpha\sin\theta)$よりも大きくなければならない。

よって $m(\alpha\cos\theta - g\sin\theta) > \mu m(g\cos\theta + \alpha\sin\theta)$

これから$(\tan\theta + \mu)g < (1 - \mu\tan\theta)a$

(a と左辺は正なので) $1 > \mu\tan\theta$ かつ $\alpha > \frac{g(\tan\theta+\mu)}{1-\mu\tan\theta}$

(3) 図に示した方向に電車が**等加速度運動**している。加速度の大きさを a[m/s^2] ($a > 0$)とすると、A が斜面に対して相対的に静止しているための θ と μ と a の関係を求めよ。

解答: (2)から上向きに動き出さないためには、$\frac{1}{\mu} \leqq \tan\theta$ または $\alpha \leqq \frac{g(\tan\theta+\mu)}{1-\mu\tan\theta}$

であればよい。また下向きに動き出さないためには、

斜面に並行『下』向きの力 $m(g\sin\theta - \alpha\cos\theta) \leqq \mu m(g\cos\theta + \alpha\sin\theta)$

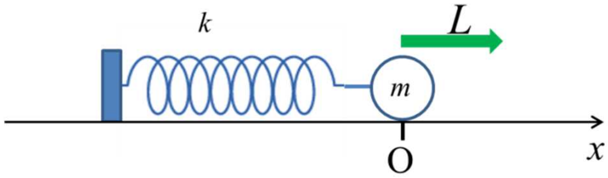
$(\sin\theta - \mu\cos\theta)g \leqq (\cos\theta + \mu\sin\theta)\alpha$ つまり $(\tan\theta - \mu)g \leqq (1+\mu\tan\theta)a$

∴右辺も g も正なので $\tan\theta \geqq \mu$ ならば $\frac{(\tan\theta-\mu)}{1+\mu\tan\theta}g \leqq \alpha$

ここで $\tan\theta < \mu$ ならば$\frac{(\tan\theta-\mu)}{1+\mu\tan\theta}g < 0$ となるので、ゆえに下向きに動き出さない条件は $\frac{(\tan\theta-\mu)}{1+\mu\tan\theta}g \leqq \alpha$

2 つを合わせて:(a) $\frac{1}{\mu} \leqq \tan\theta$ または $\alpha \leqq \frac{g(\tan\theta+\mu)}{1-\mu\tan\theta}$, かつ(b) $\frac{(\tan\theta-\mu)}{1+\mu\tan\theta}g \leqq \alpha$

問題 2.　微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ （ω は定数)が $x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$ （C_1 と C_2 は初期条件によって定まる)という一般解を持つことを前提として問に答えよ。



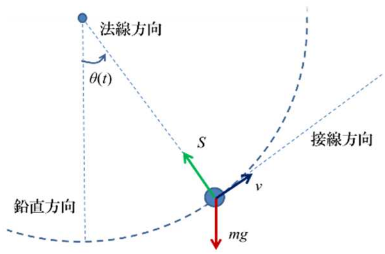
(1) バネ定数 k [N/m]の質量が無視できるばねの一端は台に固定し、他端に質量 m[kg] の質点をつけ、摩擦が無視できる水平な台の上にのせる。質点をつり合いの位置から固定端の方向に距離 L[m]だけ水平に引っ張り、静かに放した。(a)この質点の運動方程式をたて、(b)それを解くことにより、振動の周期が $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ [s]で与えられることを示せ。

解答: 質点の運動の運動方程式は、$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ と表せる。

ここで、$\omega^2 = \frac{k}{m}$とすると、この一般解は $x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$ となる。ここで t=0 のときの初期値(x=L, $\dot{x}$=0)から、

$C_1 = 0$, $C_2 = L$ となるので、この質点の運動が $x(t) = L \cos \omega t$ と表わされることがわかった。

ゆえに、周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ [s] である。



(2) 天井の一点から長さ ℓ [m] の軽い糸を垂らし、その先に質量 m[kg]の質点をつけ、鉛直面内で微小振動させる。ここで重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。この単振り子の(a)運動方程式をたて、(b)それを解くことにより運動の周期が $2\pi\sqrt{\ell/g}$ [s]で与えられることを示せ。

ヒント: 質点の速度を v[m/s]、回転角を θ [rad]とすると、$v = \ell\frac{d\theta}{dt}$ と書ける。また$\theta \cong \sin\theta$とみなせる。

解答: 質点の運動の運動方程式は、質点の速度を v[m/s]、回転角を θ [rad]とすると、

$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta$ と表せる。ここで$v = \ell\frac{d\theta}{dt}$ と書けることから、$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$

また θが小さい時 $\theta \cong \sin\theta$ であるので、$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta$ とかける。

ここで$\omega^2 = \frac{g}{\ell}$とすると、この一般解は $x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$ と表される。

三角関数の加法定理から A, φを適当な定数として、$x = A\sin(\omega t + \varphi)$と書き換えられる。これはωを角振動数とする周期関数であり、周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$の関係が成り立つ。ゆえに、周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ [s] である。