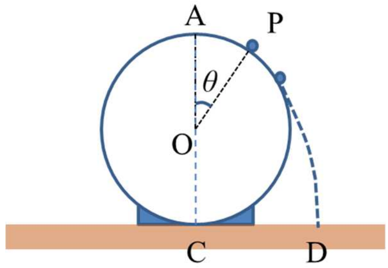
物理「力学」宿題(締切：**10** 月 **30** 日**(**水**)**午後６時、11 号館 6 階 EV ホール)　　　2019-10-18

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　**氏名**＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 6

問題１． 半径 R[m]のなめらかな球が水平な床に接した状態で固定されている。いま球の頂点 A から質量 m[kg]の質点 P がゆっくりと滑り出した。以下では重力加速度の大きさを g[m/s^2]とし、空気抵抗は無視できるものとせよ。



(1)質点 P が球の表面にとどまっているとき、O を球の中心として∠AOP が θ となったときの P の速さ v[m/s]を求めよ。

解：教科書 p.150 章末問題

P 点を位置エネルギーの基準点とすれば、質点が P にあるとき、力学的エネルギー保存則から、　$mg\,R(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2$　したがって、$v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$ [m/s]

(2) 上記の状態のときの質点 P が球から受ける垂直抗力の大きさを求めよ。

解：質点 P は円運動をしているとみなせる。重力 mg[N]の法線方向の分力と球からの垂直抗力 N[N]の差が向心力となるので　$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N$

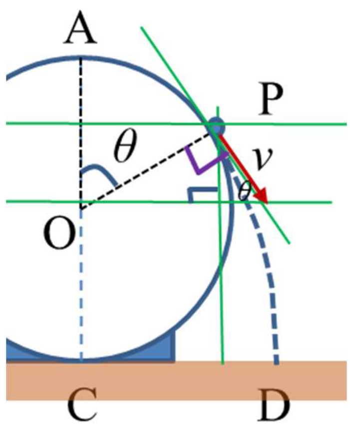
ゆえに(1)から v の値を代入して、

$N = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$ [N]

(3) (2)の答において、垂直抗力の大きさ 0 となる角度 θ を求めよ。これは質点 P が球面から離れる地点を与えている。

解：　(2)の解で N=0 として、 $3\cos\theta - 2 = 0$　ゆえに $\cos\theta = 2/3$　もしくは $\theta = \cos^{-1}2/3$

ちなみに $\sin\theta = \sqrt{5}/3$



(4) 質点 P が球面から離れた時の速さを v [m/s]、球面から離れて床に落ちるまでの時間を t [s]として、P が床に落ちた場所 D と、球の中心 O の直下の床の上の点 C との距離を答えよ。

解：　質点 P は球面から離れた時の速さ $\boldsymbol{v}$[m/s]を用いると、

水平方向 $\boldsymbol{v}\cos\theta = 2v/3$、　鉛直下向き $\boldsymbol{v}\sin\theta = \sqrt{5}v/3$ の速さをもって球面から離れる。

落下するのにかかった時間が t[s]なので、落下地点と C 点との距離は

$R\sin\theta + 2vt/3 = (\sqrt{5}R + 2vt)/3$ [m]で与えられる。

問題 2. 質量 m[kg]のボールを高さ H[m]のところで手を静かにはなし真下に落としたところ、床で跳ね返り、高さ h[m] ($h \leqq H$)まで到達した。このことから、ボールと床の反発係数(はねかえり係数)の値を求めよ。ただし重力加速度の大きさを g[m/s^2]とし、空気抵抗は無視できるものとする。

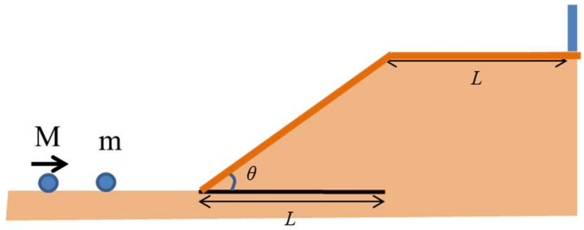
解： これは教科書にない反発係数を扱う問題（11/11 のウェブ解説をみよ）

ボールと床の反発係数を e とおく。

ボールが床に接触する直前の速さ $v = \sqrt{2gH}$ [m/s]である。これにより跳ね返った直後の速さは ev と表され、これにより跳ね返り後の最高点 $h = (ev)^2/(2g)$ と表される。

このことから、 $h = (e\sqrt{2gH})^2/(2g) = e^2H$ となる。∴ $e = \sqrt{h/H}$

問題 3. 右図のようになめらかな水平面上にある質量 M[kg]の小物体 M に水平方向右向きの速度 V[m/s]を与えて静止している質量 m[kg]の小物体 m に衝突させた。なお台と斜面はなめらかに接しており、空気抵抗は無視でき、重力加速度の大きさを g[m/s²]とする。



(1)この時の反発係数を e とする。衝突後の小物体 m の速度を求めよ。

解：右向きを正とし、衝突後の小物体 M の速度を u[m/s]、　m の速度を v[m/s]とおくと、

反発係数：$v - u = eV$　　より　$Mv - Mu = MeV$

運動量保存則: $MV = Mu + mv$　　よって　$(M+m)v = MV(1+e)$　　∴　$v = MV(1+e)/(M+m)$

(2) 衝突直後の小物体 m の速度を v[m/s]とする。衝突後、小物体 m は、図に示したような水平面と θ の角をなす斜面を滑り上がった。この斜面の動摩擦係数を μ'とする。小物体 m が斜面を上がり、水平方向で L[m]先の台にあがるための v の条件を求めよ。

解：水平面を位置エネルギーの基準点とする。小物体 m がこの斜面を上る前の力学的エネルギーは$\frac{1}{2}mv^2$[J]。また上の台は下の台よりも $L\tan\theta$[m]高いところにあり斜面の長さが $L/\cos\theta$[m]であることから、斜面をあがりきるには、 $\frac{1}{2}mv^2 \geq mgL\tan\theta + \mu' mg\cos\theta \cdot L/\cos\theta = mgL(\tan\theta + \mu')$　　∴ $v \geq \sqrt{2gL(\tan\theta + \mu')}$

(3) 小物体 m が斜面をあがったときの速度を v'[m/s] (> 0)とする。小物体 m がさらに L[m]先にある棒の直前で停止するための、この台と小物体との動摩擦係数を求めよ。

解：求める動摩擦係数を μ とおく。すると、求める条件は　$\frac{1}{2}mv'^2 = \mu mgL$ である。　∴$\mu = \frac{v'^2}{2gL}$

(4) 斜面の上の台の動摩擦係数も μ'とし、小物体 M と小物体 m は弾性衝突するとする。小物体 M を小物体 m に衝突させ、小物体 m を上の台の棒にあてるための V の条件を求めよ。

解答：　$e=1$ と(1)から衝突後の小物体 m の速度は $v = 2MV/(M+m)$ ――①

(2)から小物体 m が上の台にあがるための条件は　$v \geq \sqrt{2gL(\tan\theta + \mu')}$

エネルギー保存則から、上の台に上がったときの速度 $v' = \sqrt{v^2 - 2gL(\tan\theta + \mu')}$ ――②

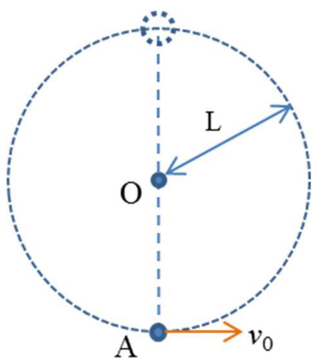
(3)から、小物体 m が棒に当てるための条件は　$\frac{1}{2}mv'^2 \geq \mu' mgL$　つまり、$v' \geq \sqrt{2\mu' gL}$ ――③

③ と②から、$\sqrt{v^2 - 2gL(\tan\theta + \mu')} \geq \sqrt{2\mu' gL}$　　$v \geq \sqrt{2gL(\tan\theta + 2\mu')}$

① から　$2MV/(M+m) \geq \sqrt{2gL(\tan\theta + 2\mu')}$

$\therefore V \geq \frac{M+m}{2M}\sqrt{2gL(\tan\theta + 2\mu')}$

問題 4. 右図のように、長さ L[m]の伸び縮みしない軽いひもの一端を点 O に固定し、他端には質量 m[kg]の小球 A をつけてつり下げ、点 O の真下にある A に対して初速度 v_0 [m/s]を与える。A が円軌道を描くためには、v_0 はどのような値でなければならないか、答えよ。ただし、重力加速度の大きさを g[m/s²]とする。



解:　A 点を位置エネルギーの基準点とする。円の最高点に到達するには、最高点における速度を v[m/s]とすると、力学的エネルギー保存則から

$\frac{1}{2}mv^2 + 2mgL = \frac{1}{2}mv_0^2$　　---　①

ひもの張力が 0 以上でないとひもがたるむため、最高点での遠心力と重力の関係を考えると　$m\frac{v^2}{L} - mg \geq 0$

これから　$v^2 \geq gL$　--- ②

① 式から$v_0^2 = v^2 - 4gL$ これを②に代入して$v_0^2 - 4gL \geq gL$　　$v_0^2 \geq 5rg$　　∴ $v_0 \geq \sqrt{5gL}$