問題 1. 水平面上を直線運動している小物体 A がある。A の質量を m[kg]、重力加速度の大きさを g[m/s^2]、時刻 t=0 における位置 x を 0[m]、速度を v_0 [m/s] (> 0)として以下の問いに答えよ。

(1) 小物体 A は平面から動摩擦力を受けているとする。動摩擦係数を μ として、(a)運動方程式をたて、(b)A が停止するまで(ただし $t \geqq 0$)の速度 v[m/s]、(c)およびその位置を表す式を求めよ。

解: A の速度を v[m/s]とおくと、運動方程式は、

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu mg$$

両辺を t で積分し、積分定数を C とすると、$v = -\mu gt + C$ [m/s]

ここで t=0 における速度が v_0[m/s]であるから、$v = -\mu gt + v_0$ [m/s]

$v = \frac{dx}{dt}$ であるから、$v = \frac{dx}{dt} = -\mu gt + v_0$

この式の両辺を t で積分し、積分定数を C'とすると、 $x = -\frac{1}{2}\mu gt^2 + v_0 t + C'$ [m]

ここで t=0 における位置が 0[m]であるから、C' = 0

$\therefore x = -\frac{1}{2}\mu gt^2 + v_0 t$ [m]

(2) 小物体 A は平面からの動摩擦力はないが、A の速さに比例する空気抵抗を受けているとする。空気抵抗の比例定数を k として、(a)運動方程式をたて、(b)A が停止するまで(ただし $t \geqq 0$)の速度 v[m/s]、(c)およびその位置を表す式を求めよ。

解: A の速度を v[m/s]とおくと、運動方程式は、

$$m\frac{dv}{dt} = -kv$$

これを書き直すと、$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}$

両辺を t で積分し、積分定数を C とすると $\log(v) = -\frac{k}{m}t + C$

これから、 $v = \exp(-\frac{k}{m}t + C)$ [m/s]

ここで t=0 における速度が v_0[m/s]であるから、$v_0 = \exp(C)$

$$\therefore v = v_0 e^{\frac{-k}{m}t} \quad \text{[m/s]}$$

ここで $v = \frac{dx}{dt}$ であるから、$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{\frac{-k}{m}t}$

この式の両辺を t で積分し、積分定数を C'とすると、 $x = -\frac{mv_0}{k}e^{\frac{-k}{m}t} + C'$

ここで t=0 における位置が 0[m]であるから、$0 = -\frac{mv_0}{k} + C'$ $\therefore C' = \frac{mv_0}{k}$

$$\therefore x = -\frac{mv_0}{k}e^{\frac{-k}{m}t} + \frac{mv_0}{k} = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{\frac{-k}{m}t}) \quad \text{[m]}$$

問題 2. 高地における振り子の周期は。地表面に置いた場合と較べて長いという。高さ 1500.00m の高地では地表面における周期の何倍になるか、求めよ。なお必要ならば地球の半径 R=6378.137 km を用いよ。（ヒント:例題 9.6）

解答: 万有引力定数を G[Nm^2/kg^2]、地球の質量をM[kg]で表すと、地表面から高さ h[m]の位置における重力加速度の大きさ g'[m/s^2]は

$$g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

で表される。ゆえに高さ h[m]の地点での長さ l[m]の振り子の周期 T'[s]は、

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{GM}}(R+h)$$

となる。この式から、振り子の周期は $R+h$ に比例することがわかる。

よって、地表面における長さ l[m]の振り子の周期 T[s]は $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{GM}}R$[s]と表されるので、地表面より h[m]高地における振り子の周期 T' [s]は地表面における振り子の周期 T[s]の（$R+h$）/R 倍となる。

ここで R=6378.137 km、h=1500.00m を用いると、1.000235 倍である (有効数字 7 桁)。

参考: これは振り子時計ならば1日あたり 20.31941 s 遅れる計算になる(教科書 p.117 参照)

問題 3. 質量 m[kg]の質点が水平面に対し傾角 θ の粗い斜面の最大傾斜線にそって初速 v_0[m/s]で上がりだした。この質点は斜面に沿ってどれだけの距離を上がるか、それぞれの方法で求めてみよう。ただし重力加速度の大きさを g[m/s^2]、動摩擦係数を μ とする。

(1) 運動方程式をたてて解け。

解答: 斜面をあがっているときの運動方程式は、斜面に平行に x 軸を取り、速度を v[m/s]、上方向を正とすると、

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = -mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

両辺を t で積分し t=0 において $v=v_0$ を使うと $v = v_0 - (\sin\theta + \mu\cos\theta)gt$

さらに両辺を t で積分し t=0 において位置 x=0 を用いると $x = v_0 t - \frac{1}{2}(\sin\theta + \mu\cos\theta)gt^2$

ここで v=0 となるときの t を求めると、$t = \frac{v_0}{(\sin\theta+\mu\cos\theta)\mathrm{g}}$ [s]

斜面を上がりきるのに要する時間が上記の値なので、求める距離はこれを代入して、$x = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{(\sin\theta+\mu\cos\theta)\mathrm{g}}$ [m]

(2) 仕事とエネルギーの概念を用いて解け。つまり初めに質点がもっている力学的エネルギーと、動摩擦力による仕事、および上がりきった時の力学的エネルギーの関係を用いて解け。

解答: 斜面を上がる時に質点が持っていた力学的エネルギー: $mg\times 0 + \frac{1}{2}m{v_0}^2$ [J]

この質点が斜面に沿って L[m]上がったとすれば、

動摩擦力がした仕事: $-\mu mg\cos\theta \times L$ [J]

質点が持っている力学的エネルギー: $mg \times L\sin\theta + \frac{1}{2}m0^2$ [J]

よって(12.1.8)式から、$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \mu mgL\cos\theta + mgL\sin\theta = mgL(\mu\cos\theta + \sin\theta)$ $\quad\therefore L = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{(\sin\theta+\mu\cos\theta)\mathrm{g}}$ [m]