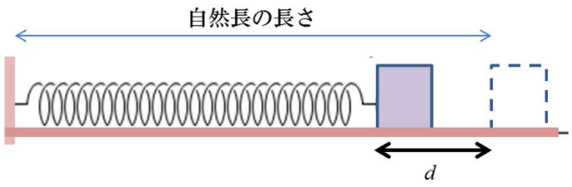
学籍番号 ________________ 氏名 ________________

問題 1. なめらかな水平面上に、ばね定数 k [N/m]のばねの一端を壁に固定し、他端に質量 m [kg]の小物体を取り付けた。空気抵抗は無視でき、重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。



(1) ばねが自然長から d [m]だけ縮めるのに要する仕事を求めよ。

解: ばねを自然長から x [m]だけ縮めたときのバネの力は kx [N]。このちからに逆らって d[m]縮めるのであるから、公式 11.2 (教科書 p.134)から$\int_0^d kxdx = \frac{1}{2}kd^2$ [J]

(2) (1)のとき、蓄えられた弾性エネルギーの大きさを求めよ。

教科書 p.138-141
特に例題 11.3 (2)

解: (1)の結果として弾性エネルギーが蓄えられることから $\frac{1}{2}kd^2$ [J]

(3) 静かに手を放して、ばねが自然長の長さになったときの小物体の速さを求めよ。

解: 自然長になったときの弾性エネルギーは 0 である。そのときの速さを v[m/s]とすると運動エネルギーと仕事の関係(11.2.14)より

教科書 p.135-138
特に 問 31

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m0^2 = \int_0^d kxdx = \frac{1}{2}kd^2$$

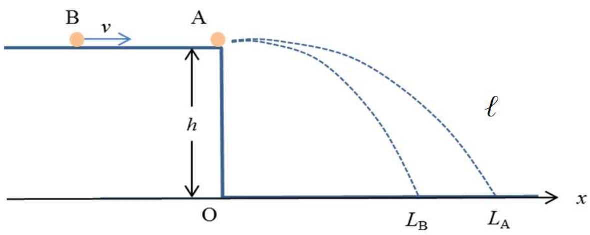
$$\therefore\ v = d\sqrt{\frac{k}{m}}\ \text{[m/s]}$$

教科書p.136
公式11.3 運動エネルギーと仕事

(4) ばねが自然長から $d/2$[m]だけ伸びた位置での小物体の速さを求めよ。

解: そのときの速さを v'[m/s]とする。(3)と同様に考えると $\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \int_0^{d/2} -kxdx$ $\therefore\ v' = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ [m/s]

問題 2. 右図のように高さ h [m]の水平でなめらかな台の上に小球 A を置く。そして A に向かって小球 B を速さ v[m/s]で衝突させる。この後 A と B は台から水平に飛び出し、台の端の位置を原点とする x 軸上の水平面に落下した。このとき、A と B は同じ鉛直面内を運動し、落下位置はそれぞれ原点から L_A[m], L_B[m]であったとする。ここで重力加速度の大きさを g[m/s^2]、空気抵抗は無視できるものとする。



(1) 衝突後の A と B の速さをそれぞれ求めよ。

解: 衝突後の A と B の速さをそれぞれ v_A[m/s], v_B[m/s]とする。A も B も同じ時刻に落下すると考えられるので、落下に要する時間を t[s]とすると、

$$v_A t = L_A,\quad v_B t = L_B \text{ となる。}$$

また、これは高さ h[m]から床に落ちた時間であるので、$h = \frac{1}{2}gt^2$ である。これから、

$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ [s]と求まる。$\therefore v_A = L_A\sqrt{\frac{g}{2h}}$ [m/s]、$v_B = L_B\sqrt{\frac{g}{2h}}$ [m/s]

(2) A と B の衝突における反発係数の値を求めよ。

解: 反発係数の値を e とおくと、$v_A - v_B = ev$ がなりたつ。

$$\therefore\ e = \frac{v_A - v_B}{v} = \frac{(L_A - L_B)}{v}\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

問題 3　なめらかな水平面上に質量 M[kg]の密度が一様で薄い板が置かれている。この静止した板の重心の上に質量 m[kg]の人が乗っている。この人が水平面と角 θ をなす方向に V_0[m/s]の速さで跳躍した。このとき、板（の重心）が動き出す速さを求めよ。

教科書 13章運動量と角運動量 (p.153)

解　教科書の運動量保存則（p.168）から「跳躍前の運動量＝跳躍後の運動量」が成り立つ。ただし、跳躍後の板は水平方向にしか運動しないので、運動の水平成分のみに注目する。

跳躍方向の水平方向を正とし、跳躍後の板の速度を V[m/s]とすると、$0 = mV_0\cos\theta + MV$

$\therefore\ V=-\frac{m}{M}V_0\cos\theta$ [m/s]

マイナスがついているのは跳躍と反対方向の運動であることを表す。速さは $\frac{m}{M}V_0\cos\theta$ [m/s]

問題 4. なめらかな水平面上に静止している質量 M[kg]の木片に、質量 m[kg]の弾丸が水平な速さ v[m/s]で打ち込まれた。弾丸は木片の中にとどまり、木片と一緒に走り出した。

(1) 弾丸が木片と一緒に走り出した速さを求めよ。

解　教科書の運動量保存則（p.168）から「木片と弾丸とからなる系について」考える。求める速さを V[m/s]とすると、

弾丸が打ち込まれる前の運動量　$mv + 0$

打ち込まれた後の運動量　$(M+m)V$

これらが等しいから、$mv = (M+m)V$　　$\therefore\ V=\frac{mv}{M+m}$ [m/s]

(2) 弾丸を打ち込んだ前と後では、木片と弾丸の系について、力学的エネルギー保存則は成り立っているだろうか、答だけではなくその理由を述べよ。

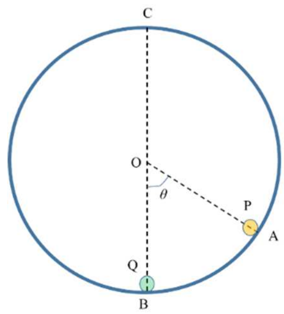
解: 平面上での運動であり保存力は無関係なので、運動エネルギーだけかんがえればよい

弾丸が打ち込まれる前の力学的エネルギー: $\frac{1}{2}mv^2 + 0$

打ち込まれた後の力学的エネルギー: $\frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{M+m}(mv)^2$

その差　$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{M+m}(mv)^2 = \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v^2$　　$v>0$ なのでこれは正の値。ゆえに成り立たない

問題 5. 右図は半径 r[m] のなめらかな円筒の鉛直断面の図である。円筒の中心点を O、その真下の円筒内面の点を B、その真上の円筒内面の点を C とする。また円筒内面の点 A は O 点と結んだ線 OA が OB と角 θ をなす点である。その A 点上に質量 M[kg]の質点 P が、点 B 上には質量 m[kg]の質点 Q がある。質点 P と Q はともにこの平面内で運動する。ここで質点 P が静止状態から円筒にそって滑り落ちて質点 Q と弾性衝突した。



質点 Q が O の真上の点 C に到達するための条件を、衝突後の質点 Q の速さを v として、v, g, r を用いて表わせ。ただし以下では重力加速度の大きさを g [m/s²] として計算せよ。なお必要ならば、位置エネルギ―の基準点を B 点（の高さ）と考えよ。（ヒント: 点 C に到達したときの質点 Q の速さを求め、それを用いて C 点における遠心力が計算できる。この遠心力はどのような大きさでなければならないだろうか？）

解: C に到達するには、C における速度を v'[m/s]とすると、力学的エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}mv'^2 + 2mgr = \frac{1}{2}mv^2 \qquad ①$$

また、円筒の壁に接触し続けるには遠心力と重力(円の中心方向の成分)の差が 0 以上でなければならないから、

（C 点において）$m\frac{v'^2}{r} - mg \geq 0$　　これから　$v'^2 \geq rg$　　②

① 式から、$v'^2 = v^2 - 4gr$　これを②に代入して、$v^2 - 4gr \geq rg$　$\therefore v^2 \geq 5rg$　$v \geq \sqrt{5rg}$