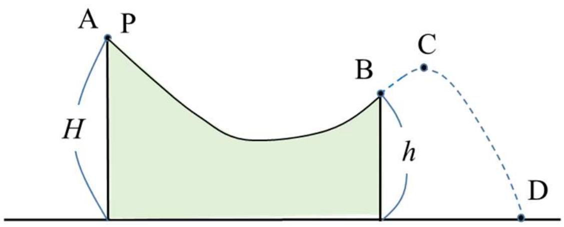
問題1**.** 右図に示すなめらかな曲面ABを持ち、高さが変化する台上の高さ H[m]の点 A から初速 0 m/s で質量 m[kg]の質点 P が滑りだし、高さ h[m]の B 点から飛び出した。重力加速度の大きさを g[m/s^2]とし、空気抵抗は無視できるものとする。



(1) 点 B から質点 P が飛び出るときの速さ v[m/s] を求めよ。

解答: 位置エネルギーの基準点を点 D がある水平面とする。

力学的エネルギー保存則から(A 点と B 点)、 $mgH=mgh+\frac{1}{2}mv^2$ が成り立つ。よって、$v=\sqrt{2g(H-h)}$

(2) 質点 P は点 B を通過した後、放物運動をする。その最高点 C の高さは H よりも低くなる。その理由を述べよ。

解答: 位置エネルギーの基準点を点 D がある水平面とする。点 C での力学的エネルギーは、C での質点 P の速さを v'、高さを h'とすると、 $\frac{1}{2}mv'^2+mgh'$

力学的エネルギー保存則により（A 点と C 点）、 $mgH=\frac{1}{2}mv'^2+mgh'$　　これから　$h'=H-\frac{v'^2}{2g}$

ここで C 点では鉛直方向の速さは 0 であるが、水平方向の速さをもつので、　$\frac{v'^2}{2g}>0$

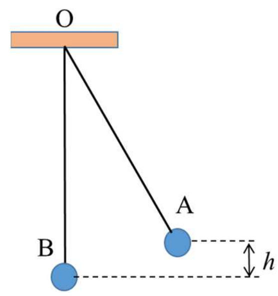
ゆえに、最高点 C の高さ $h'=H-\frac{v'^2}{2g}<H$

(3) 落下点 D での質点 P の速さを求めよ。

解答: 点 D での力学的エネルギーは、その時の速さを v''とすると、 $\frac{1}{2}mv''^2+mg0=\frac{1}{2}mv''^2$

力学的エネルギー保存則により(A 点と D 点)、 $mgH=\frac{1}{2}mv''^2$　　これから、$v''=\sqrt{2gH}$

問題 2. 同じ質量の 2 個の小球 A, B を天井から等しい長さで、軽く伸び縮みしない糸でつるり下げ、糸がたるまないよう小球 A を h[m]だけ図のように持ち上げて、静かに手を放す。「小球 B と衝突後に小球 A は静止し、B が最初の A と同じ高さまで上がる」。この現象を運動量保存則と力学的エネルギー保存則より説明せよ。ただし、衝突は弾性衝突であるとする。



解答: 重力加速度の大きさを g とする。球 A の衝突前の速度を v_0、衝突後の速度を v_1、球 B の衝突前の速度は 0、衝突後の速度を v とする(図の左向きを正とする)。

小球の質量を m とすると、運動量保存則から $m\,v_0+0=m\,v_1+m\,v$　書き直すと　$v_0=v_1+v$

また弾性衝突(反発係数=1)なので、　$1\times v_0=v-v_1$　　これらより　$v=v_0$,　$v_1=0$

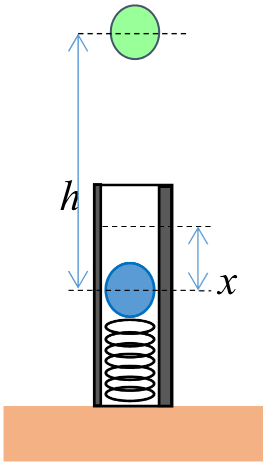
∴A は衝突後に静止し、B の速度は v_0 (球 A の衝突前の速度)

力学的エネルギー保存則から(B の初期位置を位置エネルギーの基準点とする)小球 A の初期位置と衝突直前)　$mgh=\frac{1}{2}mv_0^2$　　ここで $v=v_0$ から $mgh=\frac{1}{2}mv^2$ が導けた

B が衝突後に達する最高点の（B の初期位置からの）高さを H とすると、$mgH=\frac{1}{2}mv^2$ $=$ mgh

すなわち $H=h$ が成り立つ。 ∴B は最初の A と同じ高さまでに上がる

問題 3. 鉛直に立てた筒の中に軽いばねを固定し、小物体を鉛直上方に発射する装置を作った。ばねを自然長からx[m]だけ縮めてから、質量m[kg]の物体を静かにはなしたところ、この小物体は高さ h[m]まで上がった。ただし空気抵抗は無視でき、重力加速度の大きさをg[m/s^2]とする。



(1) 使用したばねの定数kを求めよ。

解答: 位置エネルギーの基準点をばねの自然長から x[m]下の位置にとると、力学的エネルギー保存則から、$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m0^2 + mgh$ $\quad \therefore\ k = \frac{2mgh}{x^2}$ [N/m]

(2) ばねが自然長になった瞬間の小物体の速さを求めよ。

解答: (1)同様、位置エネルギーの基準点をばねの自然長からx[m]下の位置にとる。求める速さをv[m/s]とすると、力学的エネルギー保存則から

$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgx$ (1)の結果から、$mgh = \frac{1}{2}kx^2$ よって $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgx$

これより、$v^2 = 2(h-x)g$ $\quad \therefore\ v = \sqrt{2(h-x)g}$ [m/s]

(3) **ばねを縮めた位置から**小物体を高さ $2h$[m]まで打ち上げるには、ばねをどれだけ縮めたらよいか。自然長から縮める長さy[m]を求めよ。

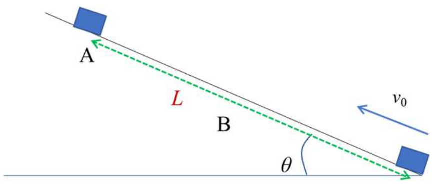
解答: 自然長からy[m]下の位置を位置エネルギーの基準点にとる。

力学的エネルギー保存則から、$\frac{1}{2}ky^2 = 2mgh$ $\quad y^2 = \frac{4mgh}{k}$

ここで$k = \frac{2mgh}{x^2}$ から $y^2 = \frac{4mgh}{2mgh}x^2 = 2x^2$ $\quad \therefore \mathrm{y} = \sqrt{2}x$ [m/s]

問題 4. 質量m[kg]の質点が傾角θの粗い斜面の最大傾斜線にそって初速v_0[m/s]で上がりだした。この質点は斜面上どれだけの距離を上がるか？ただし重力加速度の大きさをg[m/s^2]、動摩擦係数をμ'とする。

解答: 質点が斜面上を上がる距離をL[m]、動摩擦力をF[N]とすると、運動エネルギーと仕事の関係より



$\frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{1}{2}m0^2 = FL + mgL\sin\theta$

$F = \mu' mg\cos\theta$ を代入すると、$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgL(\sin\theta + \mu' \cos\theta)$

ゆえに、$L = \frac{{v_0}^2}{2g(\sin\theta + \mu' \cos\theta)}$

問題 5. 時速 72km で水平な直線道路を等速走行する車の駆動力の大きさとその仕事率を求めよ。ただし、車は路面からの摩擦力と空気の抵抗を合わせて、全部で 430 N の抵抗を受けているものとする。

解答: 等速走行する車の駆動力は、路面などからの抵抗とつりあう(そして、路面からの抵抗力から。推進力が与えられる)。したがって、駆動力の大きさは 430 N

車の速さvは時速 72km であるから、SI 単位系で表すと

$v = 72 \times 10^3 / (60 \times 60) = 20$ m/s

ゆえに、仕事率は: 仕事/時間 ＝ 力･距離/時間=力･速さ ＝$430 \times 20 = 8.6 \times 10^3$ W