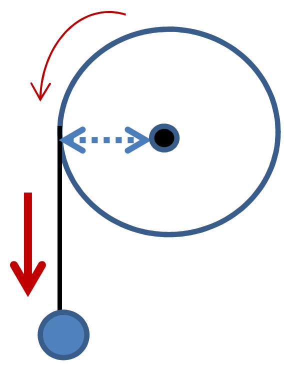
学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　**氏名** ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

並進運動と回転運動の類似性

並進運動（位置を x で表す）		回転運動（回転角を θ で表す）	
速度	$v = \frac{dx}{dt}$	角速度	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度	$a = \frac{dv}{dt}$	角加速度	$\beta = \frac{d\omega}{dt}$
等加速度運動	$v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	等角加速度運動	$\omega = \omega_0 + \beta t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$
質量	m	慣性モーメント	I (計算例は 15.3 節参照)
運動エネルギー	$K = \frac{1}{2}mv^2$	運動エネルギー	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
仕事	$W = \int F dx$	仕事	$W = \int \tau d\theta$
仕事率	$P=Fv$	仕事率	$P=\tau\omega$
運動量	$p=mv$	角運動量	$L=I\omega$
力と運動量	$F = \frac{dp}{dt}$	トルク(τ と表記、力のモーメント)と角運動量	$\tau = \frac{dL}{dt}$
運動方程式 (上式と同じ)	$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$（外力の和）	運動方程式 (上式と同じ)	$\frac{dL}{dt} = N$ (外力モーメントの和)

問題 1.　右図のように、摩擦のない水平な軸まわりに、自由に回転できる円板に軽い糸を巻き付け、糸の下端におもりをつけて手をはなす。するとおもりが落下することにより円板は回転を始め、その角速度は次第に速くなる。



(1) あるときの角速度が 2.0 rad/s、10 秒後の角速度が 7.0rad/s とすれば、角加速度はいくらか。式を書いて求めよ。

解

角加速度は毎秒ごとの角速度の変化であるから　(7.0 – 2.0)/10 = 0.50 rad/s^2

(2) この円板の半径が 1.0m であり、おもりを落下させてから 4.0s の間におもりが 10.0m 下がったとする。この円板の回転の角加速度はいくらか。式を書いて求めよ。

解

おもりが 10.0m さがったことから、4.0s の間にこの円板は 10.0/1.0 = 10 rad 回転したことになる。

おもりを落下させた直後の角速度は 0.0rad/s、また等角加速度運動と考えられるので角加速度を β で表すと

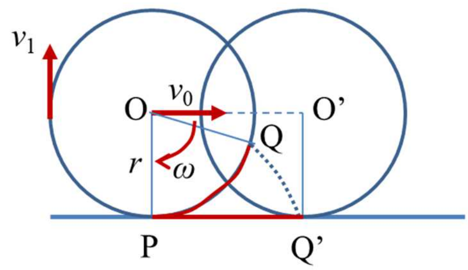
4.0 の間の回転角：　10　$= 0.0 + 0.0\times4.0 + \frac{1}{2}\beta\times4.0^2 = 8.0\beta$　　$\therefore$　β= 1.25 rad/s^2

有効数字が2桁であることから、β= 1.3 rad/s^2

問題 2 右図は直円柱が水平面上をころがっている状態を表している。その中心の速さ v_0 は、円周上の点の速さ(接線方向の速さ) v_1 に等しく、円柱の半径を r、円柱の角速度を ω とすると、

$$v_0 = v_1 = r\omega$$

となることを示せ。



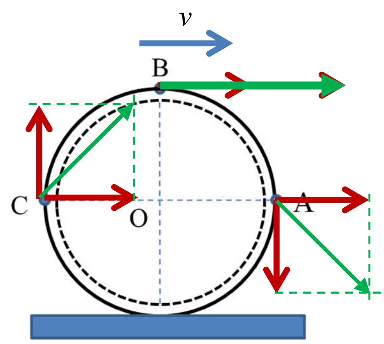
解　　右図から、1 秒間に角 ω だけ回転すると、接点 P から円周に沿って $r\omega$ 離れた点 Q までの円周の部分が水平面に接触し、Q は 1 秒後に Q'に移る。また 1 秒に中心が移動した点を O'とすると、中心が移動した距離は $\overline{\mathrm{OO'}}$と表される。ここで、 $\overline{\mathrm{PQ'}}=r\omega$ であり、$\overline{\mathrm{PQ'}} = \overline{\mathrm{OO'}}$から、$\overline{\mathrm{OO'}}=r\omega$　　$\therefore v_0 = r\omega$

また、1 秒間に角 ω だけ回転するなら、接線方向の速さ $v_1 = r\omega$ であることから、
以上の二つを合わせて、$v_0 = v_1 = r\omega$ となることが示された。

問題 3. 右図は速さ v で右向きに泥道を走っている自転車の車輪を表している。

(1) この車輪の A, B、C についた泥は、どのような方向に飛ばされるか、矢印で示せ。

(2) また泥 B(中心 O の真上)、泥 C(中心 O と同じ高さ)が飛び出す速さはどのくらいか、v を用いて答えよ。

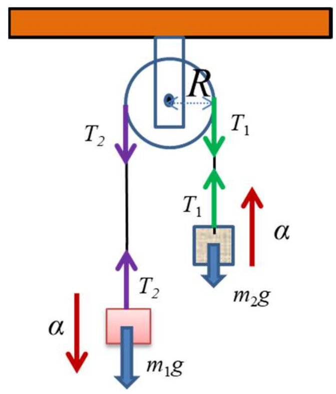


解

(1) 図に示した。問題 2 から、円周上の点の接線方向の速さは、中心の速さに等しく、この場合は v である。また A,B,C 上の泥はみな速さ v という右向き水平方向の速さをもっている。このことから、A 点の泥は、水平方向から 45°下向きの方向、B 点の泥は水平方向、C 点の泥は水平方向から 45°上向きの方向に飛ばされる。

(2) (1)から、B 点の泥は $2v$、C 点の泥は$\sqrt{2}v$の速さを持つ

問題 4. 右図のように水平な軸の周りに回転できる慣性モーメント I, 半径 R の定滑車に軽い糸をかけ、質量 m_1, m_2 $(m_1 > m_2)$のおもり A,B をつるして、静かに放す。このときのおもりの加速度 α とそれぞれの糸の張力を求めよ。ただし重力加速度を g とし、空気の抵抗は無視でき、糸は滑らないものとする。



解　　$m_1 > m_2$ であるから、A は下向き、B は上向きの加速度 α で運動する。糸の張力を A 側は T_1, B 側は T_2とすると、運動方程式は:

A: (下向きを正)　$m_1\alpha = m_1 g - T_1$　　　①

B: (上向きを正)　$m_2\alpha = T_2 - m_2 g$　　　②

滑車は反時計回りの角加速度 β で回転する。これは、$T_1 > T_2$を意味する。半径 R であるから、力のモーメント(トルク)　$\tau = T_1R - T_2R = (T_1 - T_2)R$ である。これから回転の運動方程式は $I\beta = (T_1 - T_2)R$　　　③

おもりの加速度は、滑車の円周上の接線加速度に等しいので $\alpha = R\beta$　　　④

① 〜④により(④から $\beta = R/\alpha$、これを③に代入して、$(T_1 - T_2) = I\alpha/R^2$、これを①+②に代入)

$$\alpha = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2} g \qquad \text{これから} \quad T_1 = m_1(g - \alpha) = \frac{2m_2 + I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} m_1 g \qquad T_2 = \frac{2m_1 + I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} m_2 g$$

問題 5. 問題 4 において滑車の質量が無視できるとすれば(つまり I=0 となる)、結果はどう変わるか。

解 (教科書例題 6.3 参照)

③の式から $(T_1 - T_2)R = 0$ つまり $T_1 = T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$であり、$\alpha = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$