

学籍番号

氏名

1年生用

問1. 水平な床と垂直な壁があり、まっすぐで一樣な長さ ℓ の細い棒が立てかけられている。棒が床面となす角度を θ とし、重力加速度の大きさを g とする。

(1) 棒にはたらく力を書きこめ(棒の質量を m とする)。

ヒント: 棒にはたらく力は、重力(mg)、床からの垂直抗力(N_f)と壁からの垂直抗力(N_w)、床からの摩擦力(F_f)との壁から摩擦力(F_w)の5つ。

(2) 壁がなめらかで棒と床との静止摩擦係数が μ のとき、棒がすべらない最小の角度を求めよ。

図のように、壁からの垂直抗力を N_w 、壁からの静止摩擦力を F_w 、床からの垂直抗力を N_f 、床からの静止摩擦力を F_f 、棒にかかる重力の大きさを mg とする

すべりだす限界にある力のつりあい:

床に平行方向: $N_w - F_f = 0$

床に垂直方向: $N_f + F_w - mg = 0$

静止摩擦力の制約から、 $F_f \leq \mu N_f$

壁がなめらかなため $F_w = 0$ したがって以上を整理すると

$N_w = F_f \quad \dots \text{①}$

$N_f = mg \quad \dots \text{②}$

$F_f \leq \mu N_f = \mu mg \quad \dots \text{③}$

また点 P での力のモーメントは、

$$\frac{\ell}{2} mg \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \ell N_w \sin\theta = 0$$

$$mg \cos\theta - 2N_w \sin\theta = 0 \quad \text{ゆえに } mg = 2N_w \tan\theta \quad \text{書き換えると } N_w = \frac{mg}{2 \tan\theta}$$

ここで、①と③から $F_f = N_w = \frac{mg}{2 \tan\theta} \leq \mu mg$

したがって、 $\tan\theta \geq \frac{1}{2\mu}$ \tan 関数は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ は単調増加であるので、これをみたす最小の角度

θ に対しては $\tan\theta = \frac{1}{2\mu}$ となる。 \tan の逆関数を用いて表すと $\theta = \tan^{-1} \frac{1}{2\mu}$

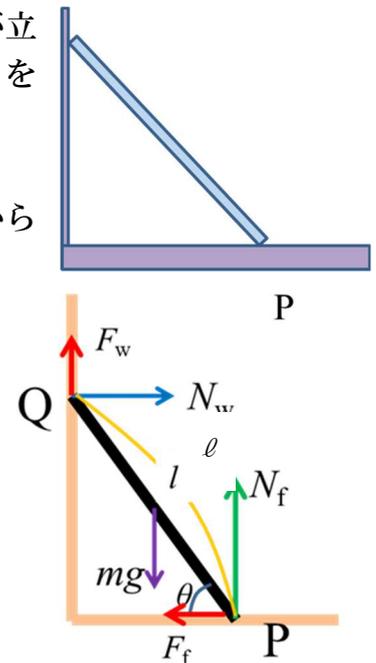
(3) 壁がなめらかで棒と床との静止摩擦係数が μ とする。質量が $3m$ の物体をこの棒の上端から $1/3$ のところにぶら下げる時、棒がすべらないための最小の角度を求めよ。

床に平行方向: $N_w - F_f = 0$ つまり $N_w = F_f \quad \dots \text{①}$

床に垂直方向: $N_f - (m+3m)g = 0$ つまり $N_f = 4mg \quad \dots \text{②}$

静止摩擦力の制約から、 $F_f \leq \mu N_f = 4\mu mg \quad \dots \text{③}$

点 P での力のモーメント $\frac{\ell}{2} mg \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{2\ell}{3} (3m)g \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \ell N_w \sin\theta = 0$



これを書き換えると

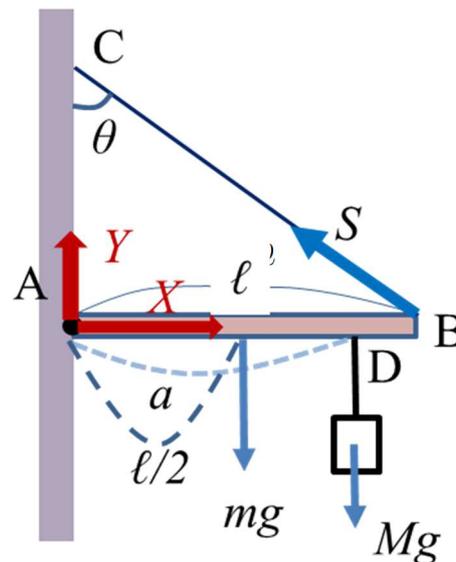
$$5mg \cos\theta - 2N_w \sin\theta = 0 \quad \text{ゆえに } 5mg = 2N_w \tan\theta \quad \text{書き換えると } N_w = \frac{5mg}{2 \tan\theta}$$

ここで、①と③から $F_f = N_w = \frac{5mg}{2 \tan\theta} \leq 4\mu mg$

したがって、 $\tan\theta \geq \frac{5}{8\mu}$ \tan 関数は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ は単調増加であるので、これをみたす最小

の角度 θ に対しては $\tan\theta = \frac{5}{8\mu}$ となる。 \tan の逆関数を用いて表すと $\theta = \tan^{-1} \frac{5}{8\mu}$

問2. 右図のように、質量 m の均質な長さ ℓ [m] の棒が、一端はピン A で壁に取り付けられ、他端は糸 BC で壁に結ばれて、水平になっている。糸と壁がなす角は θ である。いま、棒上の点 D ($AD=a$ [m]) に質量 M [kg] のオモリをつりさげた。重力加速度の大きさを g [m/s²] として以下の間に答えよ。ただし、図において X はピン A の抗力、 Y はピン A に壁に平行にはたらく力、 S は糸の張力を表す。答だけではなくどのように考えたかも分かるように書くこと。



(1) 棒が静止するために成り立つ条件を書け (M, g, a, ℓ, θ 以外に X, Y, S を用いて良い)

① 鉛直方向の力のつり合い:

$$(M+m)g = S \cos\theta + Y$$

② 水平方向の力のつり合い:

$$X = S \sin\theta$$

③ A 点周りの力のモーメントのつり合い:

$$S \ell \sin(\pi/2 - \theta) - aMg - \ell mg / 2 = 0$$

(2) 糸 BC の張力 S [N] の大きさを求めよ。 M, g, a, ℓ, θ から適切なものを用いて表すこと。

③を書き直すと $2\ell \cos\theta = (2aM + \ell m)g$

これから $S = \frac{(2aM + \ell m)g}{2\ell \cos\theta}$

(3) ピン A の抗力 X [N] の大きさを求めよ。 M, g, a, ℓ, θ から適切なものを用いて表すこと。

(2)の解答から②に代入して

$$X = \frac{(2aM + \ell m)g}{2\ell} \tan\theta$$

(4) ピン A に壁に平行にはたらく力 Y [N] の大きさを求めよ。 M, g, a, ℓ, θ から適切なものを用いて表すこと。

①から $Y = (M+m)g - \frac{(2aM + \ell m)g}{2\ell} = \left(\frac{\ell-a}{\ell}M + \frac{1}{2}m\right)g$