

学籍番号 _____

氏名 _____

2~4年生用

問題1. 以下の問に答えよ。

(1) 質点の位置が $x(t) = -10t^2 + 5t + 20$ で与えられるとき、質点の速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を t で表せ。

解答 速度 $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -20t + 5$

加速度 $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -20$

位置(ベクトル)を時間(t)で微分 → 速度(ベクトル)
 速度(ベクトル)を時間(t)で微分 → 加速度(ベクトル)

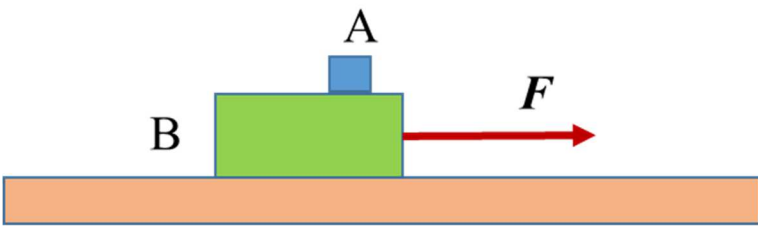
(2) 質点の位置ベクトルが次式で与えられる時、速度ベクトルと加速度ベクトルを求めよ(ただし、 a, b, c は定数。ここで答え方は $3t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ の形で答えよ。

$\mathbf{r}(t) = (a \cos(bt+c), a \sin(bt+c), -5t^2+2t)$ 注: $a \cos(bt+c)\mathbf{i} + a \sin(bt+c)\mathbf{j} + (-5t^2+2t)\mathbf{k}$ と等価

解答 速度 $v(t) = \frac{dr(t)}{dt} = -ab \sin(bt+c)\mathbf{i} + ab \cos(bt+c)\mathbf{j} + (-10t+2)\mathbf{k}$

加速度 $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -ab^2 \cos(bt+c)\mathbf{i} + ab^2 \sin(bt+c)\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

問題2. なめらかな水平な床の上に質量 M の小物体 B があり、その上に質量 m の小物体 A が載っている。小物体 B の上面と小物体 A の下面は水平であるとする。



B に糸をつけて水平に力 F で引っ張った。ここで、重力加速度の大きさを g とし、空気の抵抗は無視できるものとする。また右方向を正とする。

(1) 小物体 B の上面は滑らかで、小物体 A と小物体 B の間には摩擦がはたらかないとする。このときの小物体 A と B の加速度をそれぞれ求めよ。

解答 --- これはだるま落としの状態

小物体 A と小物体 B はともに鉛直方向には運動しないため、鉛直方向の加速度は 0

小物体 A と小物体 B の間には摩擦がはたらかない ⇒ A には力が働かない

よって小物体 A の水平方向の加速度 = 0

小物体 B も、A ととも床の間にも摩擦がはたらかない ⇒ 摩擦力は 0

したがって B だけが F によって水平方向に加速度を持つ。その加速度 $\alpha = \frac{F}{M}$ ($\because F = M\alpha$)

(2) 小物体 A と小物体 B の間には摩擦がはたらき、A と B は等しい大きさの加速度で動いた。このときの A と B の加速度、および A と B の間の摩擦力の大きさを求めよ。またこの時の摩擦力の名称も答えよ。

解答 A と B が一体となって動いた(同じ加速度を持つ)ので、その加速度を α とすると、

$F = (M + m)\alpha$ が成り立つ。ゆえに、 $\alpha = \frac{F}{(M+m)}$

A は B との摩擦力によってこの加速度をもつから、その摩擦力の大きさは $m\alpha = \frac{m}{(M+m)}F$

A と B は相対的に静止しているので、静止摩擦力である。(B も A から逆向きの静止摩擦力を受ける)

問題3 以下の問に答えよ。ただし有効数字も注意すること。

(1) 平らな直線状の道路を時速 72 km で走っていた自動車 が時刻 $t=0$ でブレーキをかけて、等加速度直線運動により 50 m 走って止まった。このときの加速度の大きさと停止した時刻を求めよ。

解答 まず時速 72 km を SI 単位系で表す。 $72 \times 10^3 \text{ m} / (60 \times 60) \text{ s} = 20 \text{ m/s}$

停止した時刻を $T[\text{s}]$ 、加速度の大きさを $a[\text{m/s}^2]$ とすると、 $20 = aT$

$$\text{また、} \int_0^T (20 - at) dt = [20t - \frac{1}{2}at^2]_0^T = 20T - \frac{1}{2}aT^2 = 50$$

これを解くと、 $T = 5.0 \text{ s}$ 、 $a = 4.0 \text{ m/s}^2$ 別解: $0^2 - 20^2 = -2a \cdot 50$ を用いてもよい

(2) 自動車がブレーキをかけて止まるとき、はたらく力は動摩擦力だけである。問題(1)が実現するための、動摩擦係数 μ' の値を求めよ。ただし、自動車の質量は 200kg、重力加速度の大きさを 10m/s^2 とする。

解答 動摩擦力 $\mu' \times 200 \times 10$ が質量 200kg の自動車に 4.0 m/s^2 の加速度を生むのだから

$$2000\mu' = 200 \times 4.0 \quad \therefore \mu' = 0.40$$

(3) 多数の車両を連結した貨物列車が平面に設置された直線軌道を等加速度運動している。貨物列車の先頭は地点 A を速度 $v_1[\text{m/s}]$ で通過し、最後尾は速度 $v_2[\text{m/s}]$ で通過した。貨物列車の中央が地点 A を通過したときの速度を求めよ。

答: 列車の長さを $L[\text{m}]$ 、加速度を $a[\text{m/s}^2]$ 、列車の中央が地点 A を通過したときの速度を $v[\text{m/s}]$ とする。

$$\text{すると、} v_2^2 - v_1^2 = 2aL \quad \text{また} \quad v^2 - v_1^2 = 2a \frac{L}{2} = aL$$

$$\text{これから} \quad v^2 = v_1^2 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{v_2^2 + v_1^2}{2} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{v_2^2 + v_1^2}{2}} \quad [\text{m/s}]$$

問題4 なめらかな水平面内を、点 O を中心として小物体 A が等速円運動している。回転半径を $L[\text{m}]$ 、A の速さは $v_0 [\text{m/s}]$ とする。以下の問に答えよ。

(1) A は $T[\text{s}]$ 間にどのくらいの距離を進むか、答えよ。

答: A の速さは $v_0 [\text{m/s}]$ だから、 $v_0 T [\text{m}]$

(2) A は $T[\text{s}]$ 間に何回転するか、答えよ。

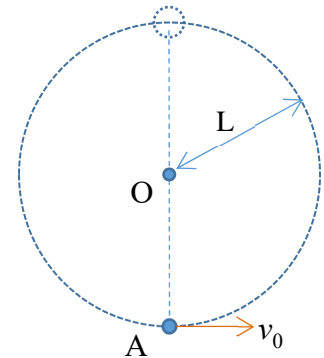
答: $T[\text{s}]$ 間に進む距離を円周 $2\pi L$ で割れば良い: $v_0 T / (2\pi L)$

(3) A の角速度を求めよ。

答: (2) から 1s に回転する角を出せば良い: $2\pi \times v_0 / (2\pi L) = v_0 / L [\text{rad/s}]$

(4) A の周期を求めよ。

答: (3) の角速度から $2\pi / \text{角速度} = 2\pi / (v_0 / L) = 2\pi L / v_0 [\text{s}]$



別解: 角速度 $\omega = v_0 / L [\text{rad/s}]$
 距離 $= L\omega T = v_0 T [\text{m}]$
 回転数 $= \omega T / (2\pi) = v_0 T / (2\pi L)$

なお(2)の答からも求められる

(5) これは「等速円運動」の一つであるが、「等速度円運動」というのはありえない。その理由を述べよ。

答: 「等速度」であるとは、同じ速さ(等速)だけではなく運動の向きも変わらないことである。

しかし円運動するには、つねに円の接線方向から円の中心の方へ向きが変化し続けなければならない。よって、向きが変わらない「等速度」では円運動にはならない