

学籍番号 _____

氏名 _____

問題 1. 以下の問に答えよ。

(1) 質点の位置が $x(t) = -10t^2 + 20$ で与えられるとき、質点の速度と加速度を求めよ。

解答 速度 $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -20t$

加速度 $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -20$

位置(ベクトル)を時間(t)で微分 → 速度(ベクトル)
 速度(ベクトル)を時間(t)で微分 → 加速度(ベクトル)

(2) 質点の位置ベクトルが次式で与えられる時、速度ベクトルと加速度ベクトルを求めよ(ただし、 a, b, c は定数。ここで答え方は 例えば $(3t, 4, t)$ の形でも $3t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ の形でも良い。

$\mathbf{r}(t) = (a \cos(bt+c), a \sin(bt+c), 0)$ 注: $a \cos(bt+c)\mathbf{i} + a \sin(bt+c)\mathbf{j}$ と等価

解答 速度 $v(t) = \frac{dr(t)}{dt} = (-ab \sin(bt+c), ab \cos(bt+c), 0)$ or $-ab \sin(bt+c)\mathbf{i} + ab \cos(bt+c)\mathbf{j}$

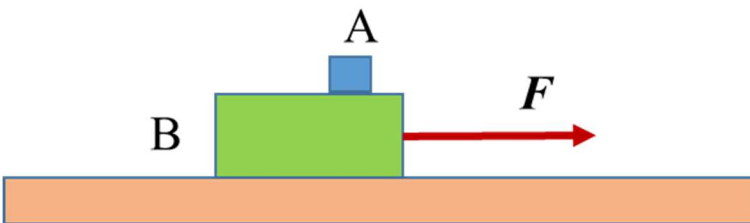
加速度 $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = (-ab^2 \cos(bt+c), -ab^2 \sin(bt+c), 0)$

or $-ab^2 \cos(bt+c)\mathbf{i} - ab^2 \sin(bt+c)\mathbf{j}$ これは $-b^2\mathbf{r}(t)$ と書ける

問題 2. なめらかな水平な床の上に質量 M

の小物体 B があり、その上に質量 m の小物体 A が載っている。小物体 B の上面と小物体 A の下面は水平であるとする。

B に糸をつけて水平に力 F で引っ張った。ここで、重力加速度の大きさを g とし、空気の抵抗は無視できるものとする。また右方向を正とする。



(1) 小物体 B の上面は滑らかで、小物体 A と小物体 B の間には摩擦がはたらかないとする。このときの小物体 A と B の加速度をそれぞれ求めよ。

解答 --- これはだるま落としの状態

小物体 A と小物体 B はともに鉛直方向には運動しないため、鉛直方向の加速度は 0

小物体 A と小物体 B の間には摩擦がはたらかない ⇒ A には力が働かない

よって小物体 A の水平方向の加速度 = 0

小物体 B も、A とともに床の間にも摩擦がはたらかない ⇒ 摩擦力は 0

したがって B だけが F によって水平方向に加速度を持つ。その加速度 $\alpha = \frac{F}{M}$ ($\because F = M\alpha$)

(2) 小物体 A と小物体 B の間には摩擦がはたらき、A と B は等しい大きさの加速度で動いた。このときの A と B の加速度、および A と B の間の摩擦力の大きさを求めよ。

解答 A と B が一体となって動いた(同じ加速度を持つ)ので、その加速度を α とすると、

$F = (M+m)\alpha$ が成り立つ。ゆえに、 $\alpha = \frac{F}{(M+m)}$

A は B との摩擦力によってこの加速度をもつから、その摩擦力の大きさは $m\alpha = \frac{m}{(M+m)}F$

A と B は相対的に静止しているので、静止摩擦力である。(B も A から逆向きの静止摩擦力を受ける)

問題 3. 以下の問に答えよ。

(1) 平らな直線状の道路を時速 72 km で走っていた自動車時刻 $t=0$ でブレーキをかけて、等加速度直線運動により 50 m 走って止まった。このときの加速度の大きさと停止した時刻を求めよ。

解答 まず時速 72 km を SI 単位系で表す。 $72 \times 10^3 \text{ m} / (60 \times 60) \text{ s} = 20 \text{ m/s}$

停止した時刻を $T[\text{s}]$ 、加速度の大きさを $a[\text{m/s}^2]$ とすると、 $20 = aT$

$$\text{また、} \int_0^T (20 - at) dt = [20t - \frac{1}{2}at^2]_0^T = 20T - \frac{1}{2}aT^2 = 50$$

これを解くと、 $T = 5.0 \text{ s}$ 、 $a = 4.0 \text{ m/s}^2$ 別解: $0^2 - 20^2 = -2a \cdot 50$ を用いてもよい

(2) 自動車がブレーキをかけて止まる時、はたらく力は動摩擦力だけである。問題(1)が実現するための、動摩擦係数 μ' の値を求めよ。ただし、自動車の質量は 200kg、重力加速度の大きさを 10 m/s^2 とする。

解答 動摩擦力 $\mu' \times 200 \times 10$ が質量 200kg の自動車に 4.0 m/s^2 の加速度を生むのだから

$$2000\mu' = 200 \times 4.0 \quad \therefore \mu' = 0.40$$

(3) 小球が半径 $r = 10 \text{ m}$ の円周上を、周期 $T = 4.0 \text{ s}$ で等速円運動している。この小球の角速度 ω 、回転数 n 、速さ v 、加速度の大きさ a を、それぞれ単位も含めて答えよ。ただし $\pi = 3.14$ 、 $\pi^2 = 9.87$ とする。

解答 角速度 $\omega = 2\pi / T = 0.50\pi = 1.57$ $\therefore 1.6 \text{ rad/s}$

回転数 $n = 1/T = 1/4.0 = 0.25$ $\therefore 0.25 \text{ Hz}$

速さ $v = r\omega = 10 \times 1.57 = 15.7$ $\therefore 16 \text{ m/s}$

加速度の大きさ $a = r\omega^2 = 10 \times (0.50\pi)^2 = 2.5 \times 9.87 = 24.649$ $\therefore 25 \text{ m/s}^2$

(4) 小球が鉛直面内を等加速度運動している。時刻 $t=0$ における位置ベクトルを 0 、速度ベクトルを $5i+20j$ 、加速度ベクトルを $-10j$ とする。

(a) 時刻 t における小球の位置ベクトルを求めよ(例: $(10t+3)i + (-9.8t^2+30t+5)j$ のように表せ)

解答 速度ベクトルは加速度ベクトルを t で積分し、初期条件 $v(0) = 5i+20j$ を満たす式となるので、

$$v(t) = 5i + (-10t + 20)j \quad (\text{水平方向は加速度 } 0 \text{ なので初期条件そのまま、鉛直方向}$$

は加速度を t で積分し、積分定数の値を初期条件から求める)

これをさらに t で積分し初期条件を満たす式が答: $r(t) = 5t i + (-5t^2 + 20t) j$

(b) 小球の位置ベクトルの y 成分 (j の係数) が 0 となる時刻(ただし $t > 0$) を求めよ。

解答 (a) から $-5t^2 + 20t = 0$ これを解くと、 $t = 0$ または 4.0

$t > 0$ から $t = 4.0 \text{ s}$

(c) 下のグラフにおいて、 $t=0$ から $t=4.0$ まで、0.5 刻みで、小球のそれぞれの位置を \times 印で表わせ。

