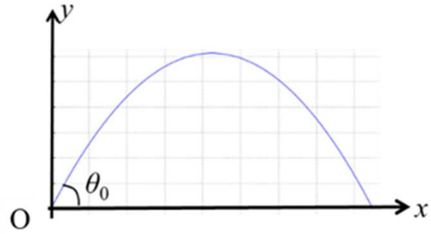
講義　物理「力学」宿題(締切：10 日午前 9 時、場所: 11 号館 6 階 EV ホール)　2019-05-06

問題１. 時刻 $t = 0$ において、小物体を地表面の一点 O から、水平方向と θ_0 の角をなす方向に速さ v_0[m/s]で投げた($0<\theta_0<\pi/2$)。右図のように、O を原点とし、地面に平行方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとって、小物体の位置を表す。この小物体が投げ上げられてから地表に落ちるまでの運動を考える。なお重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。



(1) 時刻 t における小物体の x 軸方向の加速度($\frac{d^2x}{dt^2}$) を答えよ。

解答:　x 軸方向には力が働かないので $\frac{d^2x}{dt^2}=0$ [m/s^2]

(2) 時刻 t における小物体の y 軸方向の加速度($\frac{d^2y}{dt^2}$) を答えよ。

解答:　y 軸方向には重力が働く。 $\frac{d^2y}{dt^2}=-g$ [m/s^2]

(3) 時刻 t における小物体の x 軸方向の速度($\frac{dx}{dt}$) を答えよ。

ポイント

(1) 運動の方向(水平方向、鉛直方向)ごとに運動方程式をつくる

(2) 運動方程式：(質量 m, 加速度 α)

$m\alpha$ ＝ 力の総和

力の総和=0 ならつり合い⇒ $\alpha=0$

解答: (1)より $\frac{dx}{dt}=\int\frac{d^2x}{dt^2}dt=0+C$ (C は積分定数)　t=0 のときの x 軸方向の速さが $v_0\cos\theta_0$ であるから $C=v_0\cos\theta_0$　∴ x 軸方向の速度は $v_0\cos\theta_0$ m/s]

(4) 時刻 t における小物体の y 軸方向の速度($\frac{dy}{dt}$) を答えよ。

解答:　(2)より $\frac{dy}{dt}=\int\frac{d^2y}{dt^2}dt=-gt+C$ (C は積分定数)　t=0 のときの y 軸方向の速さが $v_0\sin\theta_0$ であるから $C=v_0\sin\theta_0$　∴ y ¥y 軸方向の速度は $-gt+v_0\sin\theta_0$

(5) 時刻 t における小物体の x 軸方向の位置(x) を答えよ。

解答:　(3)より $x=\int\frac{dx}{dt}dt=v_0t\cos\theta_0+C$ (C は積分定数)　t=0 のとき x=0 より　$v_0t\cos\theta_0$ [m]

(6) 時刻 t における小物体の y 軸方向の位置(y) を答えよ。

解答:　(4)より $y=\int\frac{dy}{dt}dt=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t\sin\theta_0+$C(C は積分定数)

$t=0$ のとき $y=0$ より $-\frac{1}{2}gt^2+v_0t\sin\theta_0$ [m]

(7) (6)において y=0 として、地表に小物体が落ちる時刻 t[s]を求める。それにより、小物体が地表におちた x 軸方向の位置を答えよ。

解答: $-\frac{1}{2}gt^2+v_0t\sin\theta_0=0$ の解 t=0, $\frac{2}{g}v_0\sin\theta_0$　文意から t＞0 より、t= $\frac{2}{g}v_0\sin\theta_0$ [s]

この値と(5)の結果から x= $\frac{2}{g}{v_0}^2\sin\theta_0\cos\theta_0=\frac{1}{g}{v_0}^2\sin(2\theta_0)$　[m]

(8) (4)=0 として、小物体が最高点に達する時刻 t'[s] を求めよ。また、最高点における小物体の位置(x 座標と y 座標)を答えよ。

解答: $\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\theta_0 = 0$ より $t = \frac{1}{g} v_0 \sin\theta_0$ [s]　これを(5),(6)に代入

x 座標: $\frac{1}{g} {v_0}^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 = \frac{1}{2g} {v_0}^2 \sin(2\theta_0)$　[m]

y 座標: $-\frac{1}{2g} {v_0}^2 \sin^2\theta_0 + \frac{1}{g} {v_0}^2 \sin^2\theta_0 = \frac{1}{2g} {v_0}^2 \sin^2\theta_0$　[m]

ポイント
三角関数 の公式
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

問題 2. 上の結果から、空気の抵抗が無視できる場合、小物体を最も遠くに飛ばすには、どの角度で投げたらよいかを答えよ。

解答: 問題 1(7)より小物体が地表に落ちた x 座標の値は $x = \frac{1}{g} {v_0}^2 \sin(2\theta_0)$で与えられる。

この最大値は g, v_0 が定数であることから$\sin(2\theta_0)$ が最大となるとき、つまり $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ のときである

$(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2})$。 $\therefore \theta_0 = \frac{\pi}{4}$ [rad]

ポイント
三角関数 の常識 $(-\pi \le \theta \le \pi$ とすると$)$

$\sin\theta$ の最大値は 1 $(\theta = \frac{\pi}{2}$のとき$)$、最小値は -1 $(\theta = -\frac{\pi}{2}$のとき$)$

$\sin 0 = \sin\pi = 0$　$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$　$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$　$\sin(-\theta) = -\sin\theta$　$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \cos\theta$

問題 3 水平面上に半径 r [m]の円周がある。その一点から初速 0 m/s で時刻 $t = 0$ に出発した質点が、1 秒あたり α [m/s] の割合でその速さを増しながら円周上を運動している。摩擦は無視できるとして、時刻 t [s]における質点の(1)速さと、(2) 重力を除く加速度の大きさをそれぞれ答えよ。
ヒント: 円運動している質点は円の中心方向と接線方向の加速度を持つ。(2)で問われているのは、この 2 つの加速度(ベクトル)を合成したものの大きさである。

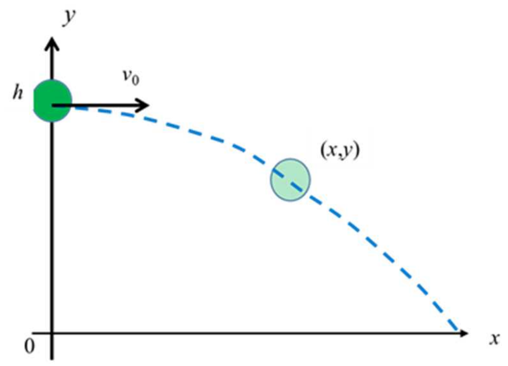
解答: (1) 問題文より加速度が α [m/s^2] であることと初速 0 m/s であることから

時刻 t における回転の速さ $v = \alpha t$ [m/s]

(2) 重力を除く加速度の大きさは、円の接線方向の α [m/s^2]と向心方向の $\frac{v^2}{r} = \frac{(\alpha t)^2}{r}$ との合成

よって$\sqrt{\alpha^2 + ((\alpha t)^2 / r)^2} = \frac{\alpha}{r}\sqrt{r^2 + \alpha^2 t^4}$ [m/s^2]　(注意: 次元を確認せよ)

問題 4. 右図のように、時刻 $t=0$ において質量 m[kg]の小物体を地表 h [m]の高さの点から速さ v_0 [m/s]で水平方向に投げた。この小物体が地表に落ちるまでの運動を問う。ただし、地面に平行に x 軸、垂直に y 軸をとって小物体の位置を表す。なお、空気の抵抗は小物体の速度に比例し、その比例係数を k [Ns/m]、重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。



(1) 時刻 $t \geqq 0$ における運動の x 成分と y 成分、それぞれの運動方程式を答えよ。

ヒント：運動においては x 方向(この問題では水平方向)の位置、速度、加速度と、y 方向（この問題では鉛直方向）の位置、速度、加速度を別の記号で表して扱うこと。

解答: x 方向は空気抵抗の力が運動と逆向きにはたらく: 運動方程式: $m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}$

なお $\frac{dx}{dt}=v_x$で表して $m\frac{dv_x}{dt}=-kv_x$ でもよい

同様に y 方向には重力と空気抵抗がはたらく:

運動方程式: $m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg-k\frac{dx}{dt}$

なお $\frac{dy}{dt}=v_y$ で表して $m\frac{dv_y}{dt}=-mg-kv_y$ としてもよい

> ポイント
> (空気)抵抗は、運動と逆向きに働く
> 物体が落下するとき、$v_y<0$
> 空気抵抗(f とする)は上向き
> だから $f=-kv_y$ とすれば、＋方向の力（上向き）を表す！

(2) 時刻 $t \geqq 0$ におけるこの物体の速度の x 成分 v_x と y 成分 v_y を表すそれぞれの式を答えよ。

解答: (1) の式を解く。

速度の x 成分 v_x ： $\frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt}=-\frac{k}{m}$ 両辺を t で積分 $\int\frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt}dt=\int-\frac{k}{m}dt$

これより $\log v_x=-\frac{k}{m}t+C$ (C は積分定数) となるので $v_x=C'\exp(-\frac{k}{m}t)$ （ここで $C'=\exp(C)$ ）

初期条件 $v_x(0)=v_0$ であるから、$C'=v_0$ $\therefore v_x=v_0\exp(-\frac{k}{m}t)$ [m/s]

速度の y 成分 v_y ： $m\frac{dv_y}{dt}=-mg-kv_y=-k(v_y+mg/k)$ から $\frac{1}{v_y+mg/k}\frac{dv_y}{dt}=-\frac{k}{m}$

両辺を時間 t で積分 $\log(v_y+mg/k)=-\frac{k}{m}t+C$ (C は積分定数)

これより $v_y+\frac{mg}{k}=C'\exp(-\frac{k}{m}t)$ （ここで $C'=\exp(C)$ ）

初期条件 $v_y(0)=0$ であるから $C'=\frac{mg}{k}$ $\therefore v_y=\frac{mg}{k}(\exp(-\frac{k}{m}t)-1)$ [m/s]

(3) h がとても大きい場合は地表面に落ちることなく運動が続く。その状況において、とても長い

時間がたった時の速度（終速度）を答えよ。

(2) の答に対しての極限値を考える

x 方向: $\lim_{t\to\infty} v_x = \lim_{t\to\infty} v_0 \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) = 0$ [m/s]

y 方向: $\lim_{t\to\infty} v_y = \lim_{t\to\infty} \frac{mg}{k}(\exp(-\frac{k}{m}t) - 1) = -\frac{mg}{k}$ [m/s]

おまけの問題：谷の深さを調べるため、崖から静かに小石を落としたところ 15 [s]秒後に音が聞こえた。空気抵抗は無視でき、重力加速度の大きさを 10 m/s2、音速を 340 m/s として、崖から谷底までの長さを求めよ。

解答: 谷の深さを x[m]、小石が落ちるまでの時間を t[s]とおく。

$x = \frac{1}{2} \times 10t^2$　　(1)

$15 = t + x/340$　　(2)

(1),(2)から　$15 = t + (5/340)\ t^2$

$t^2 + 68t - 1020 = 0$

これを解いて、 $t = 12.6$　($t > 0$ より)

∴ $x = 793.8$　　答： 7.9×10^2 m