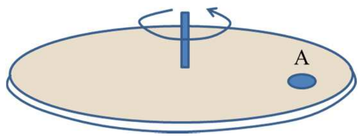
講義　物理「力学」宿題(締切：17 日(金)午前 9 時、11 号館 6 階 EV ホール)　　2019-05-13

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿



問題 1．右図のように、粗い円盤上の中心から a [m] の位置に質量 m[kg]の小物体 A を置いた。そして円盤の中心を軸として円盤を回転させた。ここで A と円盤との間の静止摩擦係数を μ、動摩擦係数を μ' とし、重力加速度の大きさを g [m/s^2]とする。

(1) 円盤の回転数が n [Hz] ($n > 0$)のとき、A に生じる向心力(遠心力）の大きさを求めよ。

解答: 回転による向心力は、角速度を ω[rad/s]とすると $ma\omega^2$ である。

ここで回転数が n [Hz]であるから、角速度 $\omega=n\times 2\pi = 2\pi n$ [rad/s]。

∴ 向心力(遠心力) = $ma\omega^2 = 4\pi^2 n^2 ma$ [N]

(2) 円盤の回転数を少しずつ上げていくと、A が円盤上を滑り始めた。A が滑り始める直前の摩擦力の大きさと、その時の回転数を求めよ。

解答: 最大静止摩擦力の大きさは、静止摩擦係数が μ であるから μmg [N]

そのときの回転数を N とすると、(1)から $4\pi^2 N^2 ma$　[N]

よって滑り始める直前では $\mu mg=4\pi^2 N^2 ma$ が成り立つので、 $N = \sqrt{\dfrac{\mu g}{4\pi^2 a}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu g}{a}}$ [Hz]

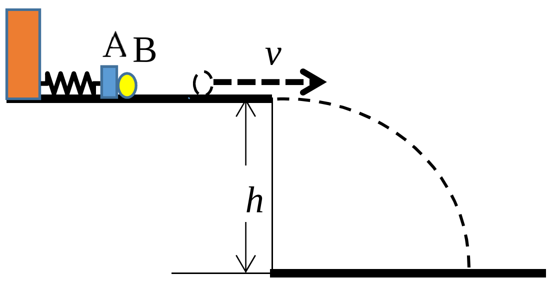
(3) 円盤の回転数が n [Hz] ($n > 0$)のとき、A は円盤上で静止していた。そして、円盤を急に止めた。すると A は動き出した。A が静止するまでに要する時間と移動する距離を求めよ。ここで、円盤は A が落ちない程度に十分大きいとする。

解答: 円盤が停止した時の A の速さ v[m/s]$= a\omega = 2\pi na$　[m/s]

また動摩擦力による加速度の大きさは A の運動に逆向きで $\mu' g$ [m/s^2]

従って A が停止するまでの時間 $t = \dfrac{2\pi na}{\mu' g}$ [s]

この間に A が移動するのは、$vt - \frac{1}{2}\mu' g t^2 = 2\pi na\dfrac{2\pi na}{\mu' g} - \frac{1}{2}\mu' g\left(\dfrac{2\pi na}{\mu' g}\right)^2 = \dfrac{2\pi^2 n^2 a^2}{\mu' g}$ [m]



問題 2. 図のようにバネ定数 k のバネに質量 M の板 A をとりつけ、この板に質量 m の小球 B を接触させる。板 A に小球 B を接触させたままバネを自然長から長さ ℓ だけ縮ませてから放すと、小球 B はバネが自然長になったところで板から離れ、なめらかな水平面をすべり、h だけ下にある床に落下する。重力加速度の大きさを g とし、空気の抵抗は無視できるものとする。

(1) バネを自然長から長さ ℓ だけ縮ませたときの弾性エネルギーの大きさを答えよ。　答え: $\frac{1}{2}k\ell^2$

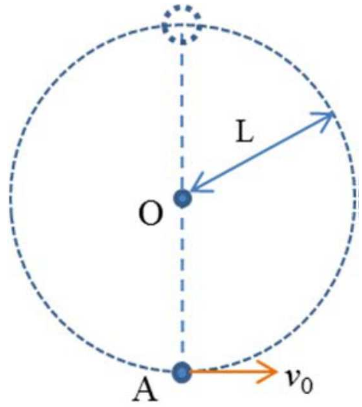
(2) 小球 B が水平面をすべる時の速さ v を k, M, m, ℓ を用いて表せ。

答:バネを縮めた時とバネから B が離れる時」の力学的エネルギー $\frac{1}{2}k\ell^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2 \therefore v = \ell\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$

(3) 小球 B が床に落下し、床と衝突する直前の鉛直方向の速度成分の大きさが $2v$ であった。このことを用いて h を v で表せ。

答:床を位置エネルギーの基準とする。鉛直方向の力学的エネルギー mgh が落下したときの力学的エネルギー$=\frac{1}{2}m(2v)^2$　と等しいから $mgh=\frac{1}{2}m(2v)^2 = 2mv^2$ ∴ $h = \dfrac{2v^2}{g}$

問題 3. 長さ L[m]の伸び縮みしない軽いひもの一端を点 O に固定し、他端には質量 m[kg]の小球 A をつけてつり下げ、点 O の真下にある A に対して初速度 v_0 [m/s]を与える。A が円軌道を描くためには、v_0 はどのような値でなければならないか、答えよ。ただし、重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。



解答： A を位置エネルギーの基準点として考える。
円運動の最高点を B, ∠BOC=θ をなす円周上の点を C とする($-\pi \leq \theta \leq \pi$)。
小球 A が C に来た時の速さを v[m/s]とすると、エネルギー保存則から、

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgL(1+\cos\theta) = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

これから、$v^2 = {v_0}^2 - 2gL(1+\cos\theta)$ --- ①
が成り立つ。また、このとき、ひもの張力 T[N]を考えると、

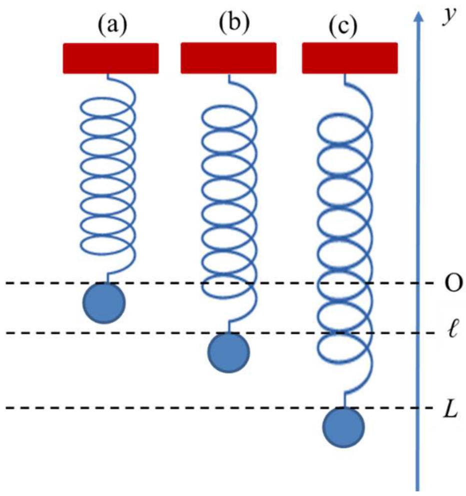
$$T = m\frac{v^2}{L} - mg\cos\theta \ \ [\mathrm{N}] \quad \text{---} \ ②$$

となる。A が円軌道を描くためには、あらゆる θ に対し、$T \geqq 0$ でなければならない。
よって、①、②から、

$$m\frac{v^2}{L} - mg\cos\theta = \frac{m}{L}({v_0}^2 - 2gL(1+\cos\theta) - gL\cos\theta) = \frac{m}{L}({v_0}^2 - gL(2+3\cos\theta)) \geqq 0$$

ここで θ=0 のとき $\cos\theta = 1$ となり T が最小値となることから、${v_0}^2 - 5gL \geqq 0$
ゆえに、$v_0 \geq \sqrt{5gL}$ [m/s]

問題 4. 右図に示すように、ばね定数 k のばねの一端を天井に固定し、他端に質量 m の物体をつけて吊り下げると、ばねは自然長から ℓ 伸びてつりあった。次にばねの自然長の位置までこの物体を戻して静かに放すと、物体は上下方向に振動した。重力加速度を g とする。



(1) つりあいの状態でのばねの伸び ℓ を、k, g, m を用いて表せ。
答え: 重力と弾性力がつりあっているので $k\ell = mg$ より $\ell = \frac{mg}{k}$
(2) つりあいの位置を通過するときの物体の速さ v を求めよ。
答え: ばねの自然長の位置を、重力と弾性力の位置エネルギーの基準点とする。図(a)の y=0 と図(b)の $y = -\ell$ の間で力学的エネルギー保存則を適用すると、

$$\frac{1}{2}m0^2 + mg \times 0 + \frac{1}{2}k0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell + \frac{1}{2}k\ell^2$$

書き換えると $\frac{1}{2}mv^2 = mg\ell - \frac{1}{2}k\ell^2$ (1)の結果をあわせて $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{(mg)^2}{k} - \frac{1}{2}k(\frac{mg}{k})^2 = \frac{(mg)^2}{2k}$

したがって $v = g\sqrt{\frac{m}{k}}$ ℓ を用いると、 $v = \sqrt{2g\ell - k\ell^2/m}$

(3) 物体の最下点でのばねの伸び L を求めよ。
答え: 図(a)の y=0 と図(c)の $y = -L$ の間で力学的エネルギー保存則を適用すると、
$\frac{1}{2}m0^2 + mg \times 0 + \frac{1}{2}k0^2 = \frac{1}{2}m0^2 - mgL + \frac{1}{2}kL^2$
書き換えると $mgL = \frac{1}{2}kL^2$ $L \neq 0$ より $L = \frac{2mg}{k}$
ℓ を用いると、 $L = 2\ell$