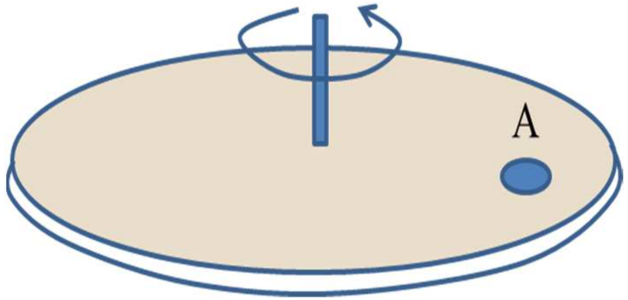
第５回宿題解説

問題１．右図のように、粗い円盤上の中心から a [m] の位置に質量m[kg]の小物体Aを置いた。そして円盤の中心を軸として円盤を回転させた。ここでAと円盤との間の静止摩擦係数をμ、動摩擦係数をμ'とし、重力加速度の大きさを g [m/s^2]とする。

(1) 円盤の回転数が n [Hz] ($n > 0$)のとき、Aに生じる向心力(遠心力）の大きさを求めよ。



解答:

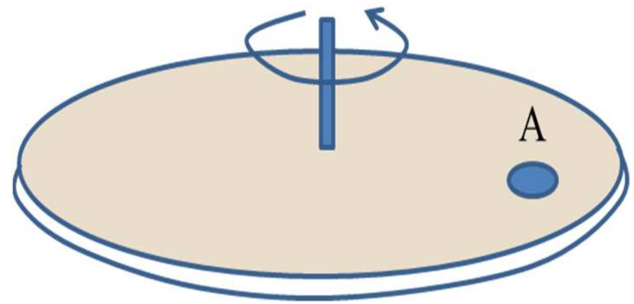
回転による向心力は、角速度をω[rad/s]とすると $ma\omega^2$ である。
ここで回転数がn [Hz]であるから、

角速度$\omega = n \times 2\pi = 2\pi n$ [rad/s]。

$\therefore$ 向心力(遠心力) = $ma\omega^2$ = $4\pi^2 n^2 ma$ [N]

(2) 円盤の回転数を少しずつ上げていくと、Aが円盤上を滑り始めた。Aが滑り始める直前の摩擦力の大きさと、その時の回転数を求めよ。

解答:



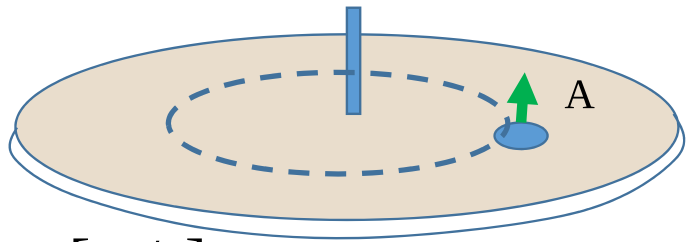
最大静止摩擦力の大きさは、静止摩擦係数がμであるから μmg [N]

そのときの回転数をNとすると、(1)から $4\pi^2 N^2 ma$ [N]

よって滑り始める直前では $\mu mg = 4\pi^2 N^2 ma$ が成り立つので、

$$N = \sqrt{\frac{\mu g}{4\pi^2 a}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu g}{a}} \text{ [Hz]}$$

(3) 円盤の回転数がn [Hz] ($n > 0$)のとき、Aは円盤上で静止していた。そして、円盤を急に止めた。するとAは動き出した。Aが静止するまでに要する時間と移動する距離を求めよ。ここで、円盤はAが落ちない程度に十分大きいとする。



解答: **ここで働く力は動摩擦力**

円盤が停止した時のAの速さv[m/s]= $a\omega$ =$2\pi na$ [m/s]

動摩擦力による加速度の大きさはAの運動に逆向きで$\mu' g$ [m/s^2]

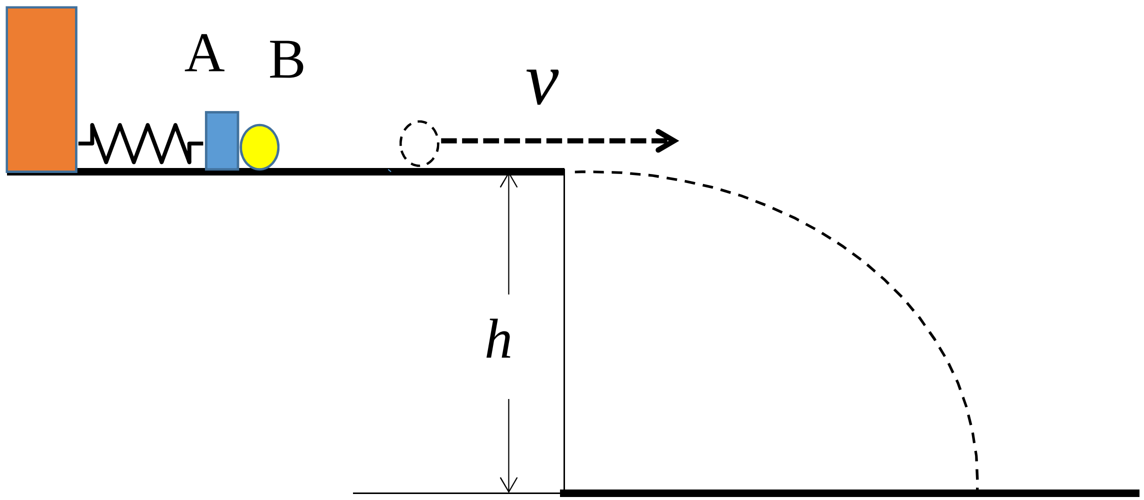
従ってAが停止するまでの時間 $v - \mu' g t = 0$ より $t = \dfrac{2\pi n a}{\mu' g}$ [s]

この間にAが移動するのは、

$$vt - \frac{1}{2}\mu' g\, t^2 = 2\pi na\frac{2\pi na}{\mu' g} - \frac{1}{2}\mu' g\left(\frac{2\pi na}{\mu' g}\right)^2 = \frac{2\pi^2 n^2 a^2}{\mu' g} \text{ [m]}$$

問題 2. 図のようにバネ定数kのバネに質量Mの板Aをとりつけ、この板に質量mの小球Bを接触させる。板Aに小球Bを接触させたままバネを自然長から長さℓだけ縮ませてから放すと、小球Bはバネが自然長になったところで板から離れ、なめらかな水平面をすべり、hだけ下にある床に落下する。重力加速度の大きさをgとし、空気の抵抗は無視できるものとする

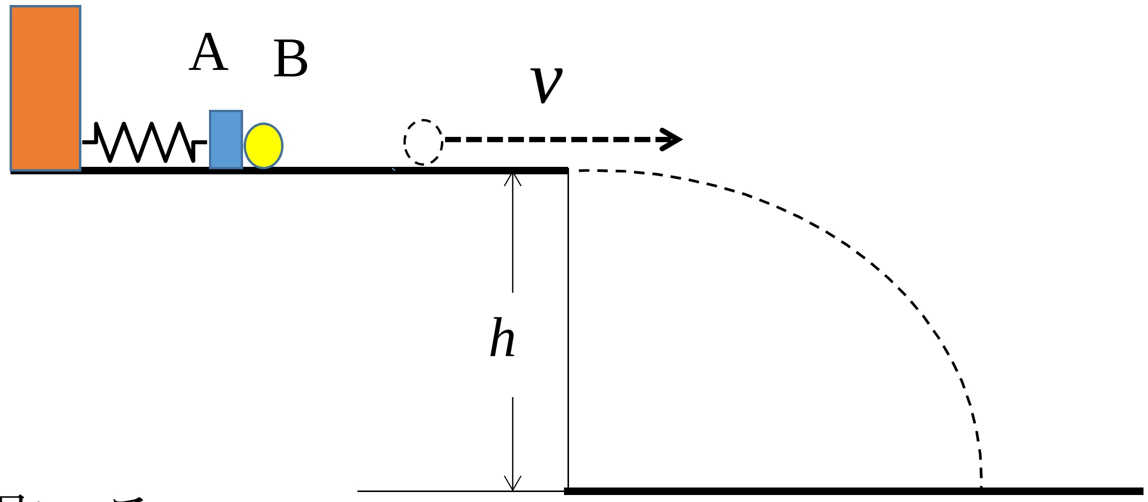
1）バネを自然長から長さℓだけ縮ませたときの弾性エネルギーの大きさを答えよ。



解答:　「弾性力」の積分

$$\int_0^{\ell} kx\,dx = \frac{1}{2}k\ell^2$$

(2) 小球B が水平面をすべる時の速さvをk, M, m, ℓを用いて表せ。



解答:

力学的エネルギー保存則を用いる

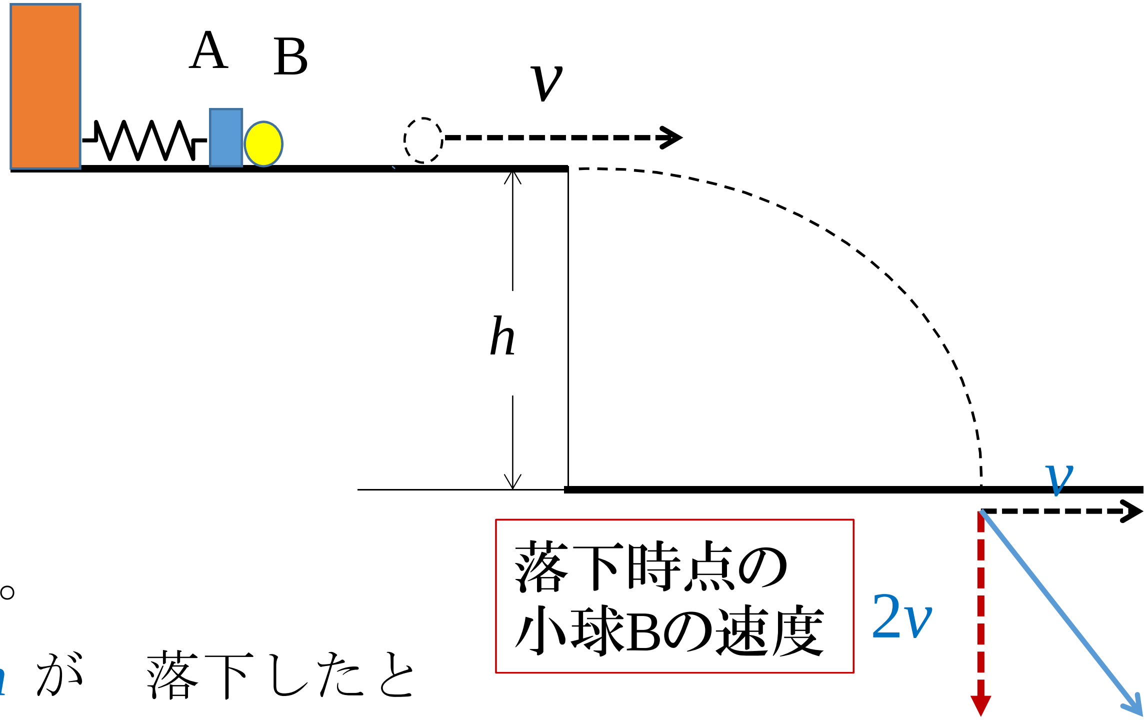
「バネを縮めた時」　(1)から$\frac{1}{2}k\ell^2$

「バネからBが離れる時」$\frac{1}{2}(M+m)v^2$

AとBの両方が運動エネルギーをもつ！

$$\frac{1}{2}k\ell^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2 \qquad \therefore v = \ell\sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

(3) 小球Bが床に落下し、床と衝突する直前の鉛直方向の速度成分の大きさが2*v*であった。このことを用いて*h*を*v*で表せ



解答:

床を位置エネルギーの基準とする。

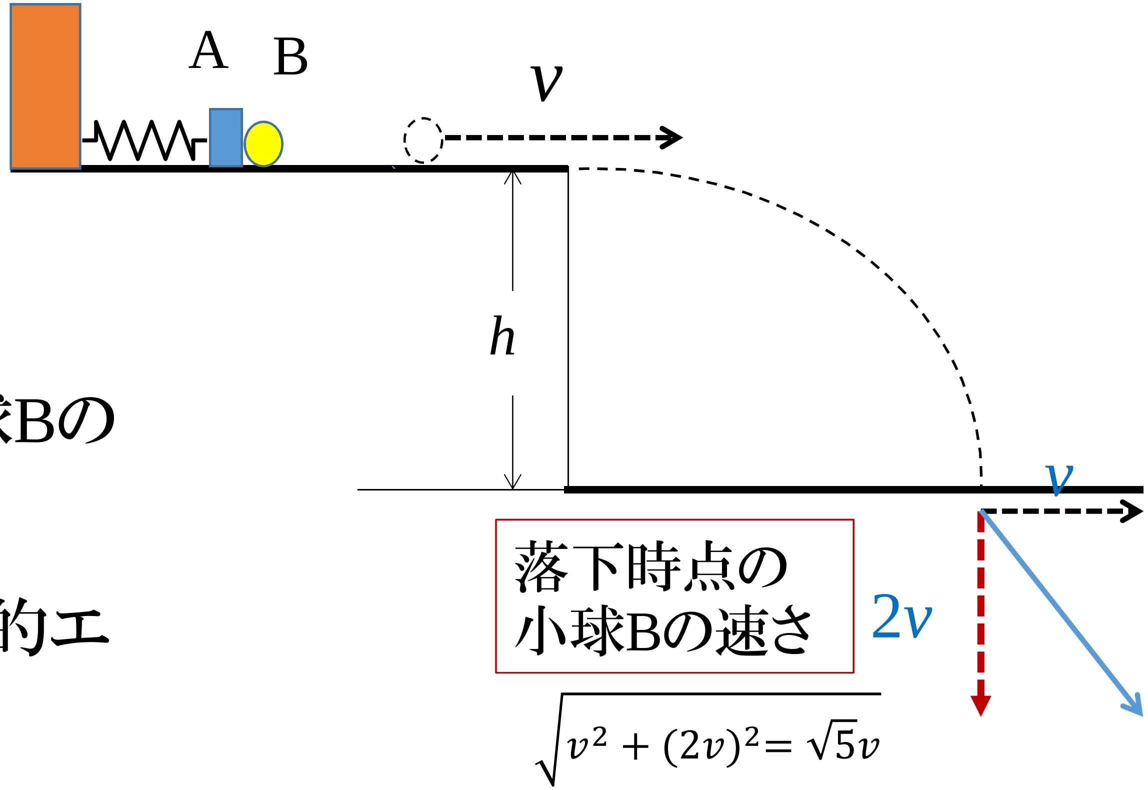
鉛直方向の力学的エネルギー mgh が　落下したときの力学的エネルギー$=\frac{1}{2}m(2v)^2$ と等しいから

$$mgh=\frac{1}{2}m(2v)^2=2mv^2 \quad \therefore \; h=\frac{2v^2}{g}$$

別解:

「鉛直方向」だけではなく、
水平方向も含めて力学的エネルギー保存則を考えると。。。

床を位置エネルギーの基準とする



水平面から飛び出したときの小球Bの力学的エネルギー　$\frac{1}{2}mv^2+mgh$

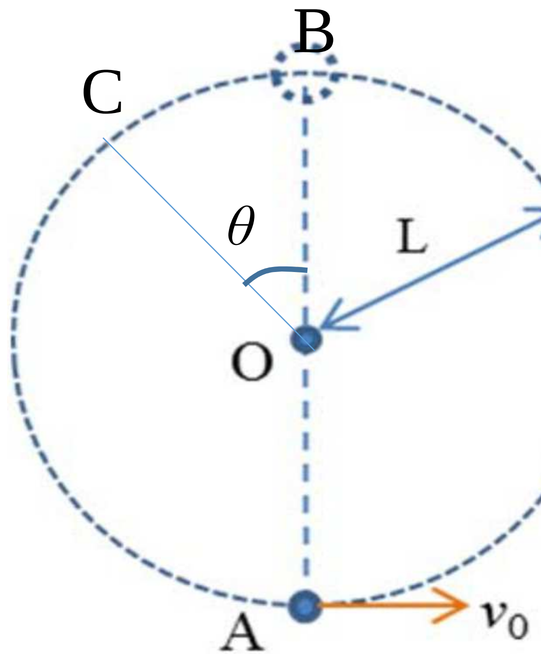
床に落下した時の小球Bの力学的エネルギー　$\frac{1}{2}m(5v^2)+0$

この2つが等しいので、$\frac{1}{2}mv^2+mgh=\frac{5}{2}mv^2$　これより

$mgh=2mv^2$　　$\therefore\ h=\frac{2v^2}{g}$

公式　$(2v)^2-0^2=2gh$ を用いても良い

問題3. 長さL[m]の伸び縮みしない軽いひもの一端を点Oに固定し、他端には質量m[kg]の小球Aをつけてつり下げ、点Oの真下にあるAに対して初速度 v_0 [m/s]を与える。Aが円軌道を描くためには、v_0はどのような値でなければならないか、答えよ。ただし、重力加速度の大きさをg[m/s^2]とする。



解答:

A点を位置エネルギーの基準として考える。

円運動の最高点をB, ∠BOC=θをなす円周上の点をCとする($-\pi \leq \theta \leq \pi$)。

小球AがCに来た時の速さをv[m/s]とすると、エネルギー保存則から、

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgL(1+\cos\theta) = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

これから、$v^2 = {v_0}^2 - 2gL(1+\cos\theta)$ --- ①

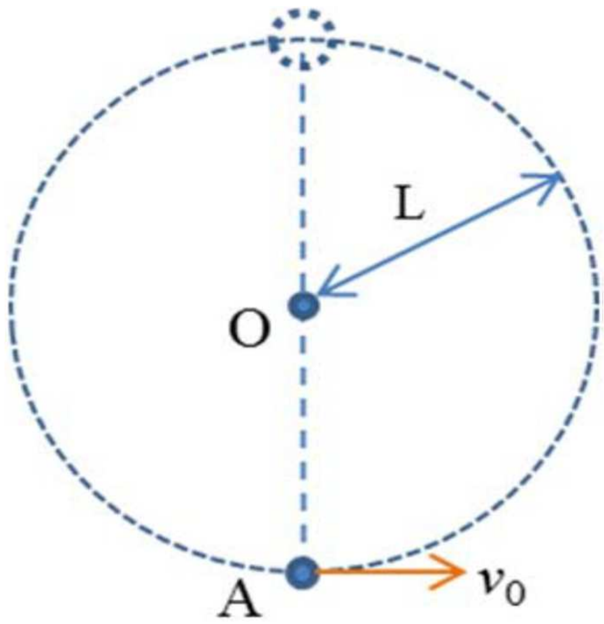
また、このときのひもの張力T[N]を考えると

$$T = m\frac{v^2}{L} - mg\cos\theta \text{ --- ②}$$

Aが円軌道を描くためには、あらゆるθで$T \geqq 0$ でなければならない。

$$v^2 = {v_0}^2 - 2gL(1 + \cos\theta) \quad \text{---} ①$$

$$T = m\frac{v^2}{L} - mg\cos\theta \quad \text{---} ②$$



Aが円軌道を描くためには、あらゆるθで$T \geqq 0$ でなければならない

①、②から$T = m\dfrac{v^2}{L} - mg\cos\theta = \dfrac{m}{L}({v_0}^2 - 2gL(1 + \cos\theta) - gL\cos\theta)$

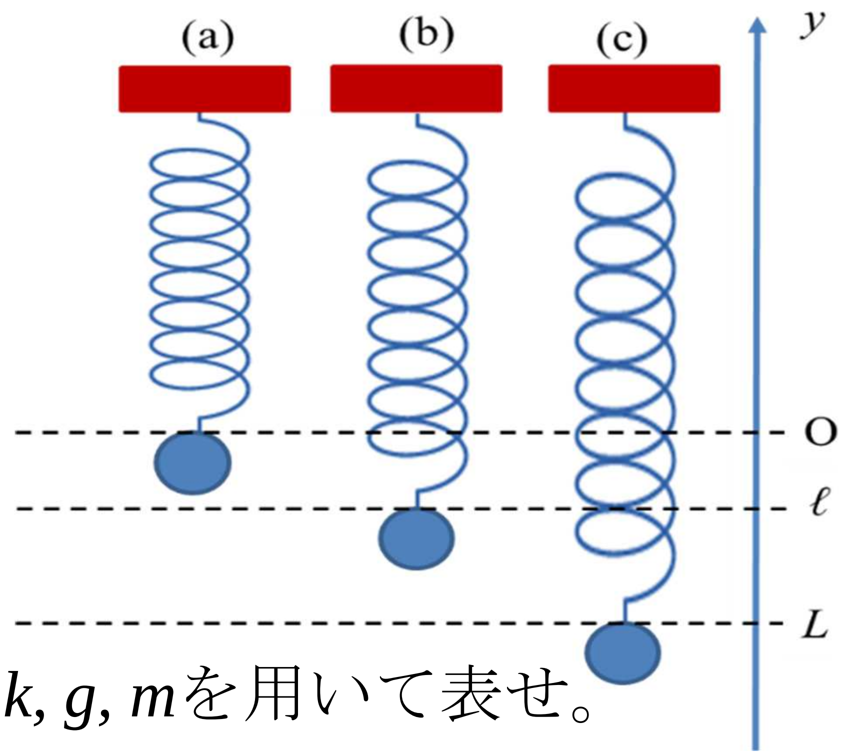
$$= \frac{m}{L}({v_0}^2 - gL(2 + 3\cos\theta)) \geqq 0$$

ここでθ=0のとき$\cos\theta = 1$ となりTが最小値となることから、

$$ {v_0}^2 - 5gL \geqq 0$$

$$\therefore \quad v_0 \geq \sqrt{5gL} \ \ [\mathrm{m/s}]$$

問題4. 右図に示すように、ばね定数kのばねの一端を天井に固定し、他端に質量mの物体をつけて吊り下げると、ばねは自然長からℓ 伸びてつりあった。次にばねの自然長の位置までこの物体を戻して静かに放すと、物体は上下方向に振動した。重力加速度をgとする。



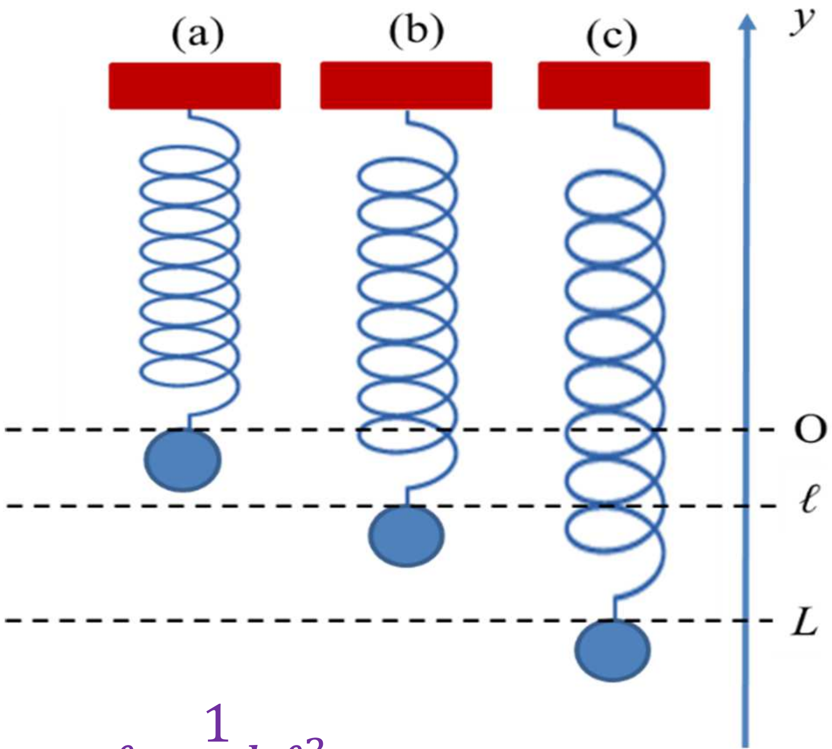
(1)つりあいの状態でのばねの伸びℓを、k, g, mを用いて表せ。

解答:

重力(mg)と弾性力($k\ell$) がつりあう

$k\ell=mg$ より $\ell = \dfrac{mg}{k}$

(2) つりあいの位置を通過するときの物体の速さvを求めよ。



解答:

ばねの自然長の位置を、重力と弾性力の位置エネルギーの基準点とする。
図(a)のy=0と図(b)の$y=-\ell$ の間で力学的エネルギー保存則を適用する

$$\frac{1}{2}m0^2+mg\times 0+\frac{1}{2}k0^2=\frac{1}{2}mv^2-mg\ell+\frac{1}{2}k\ell^2$$

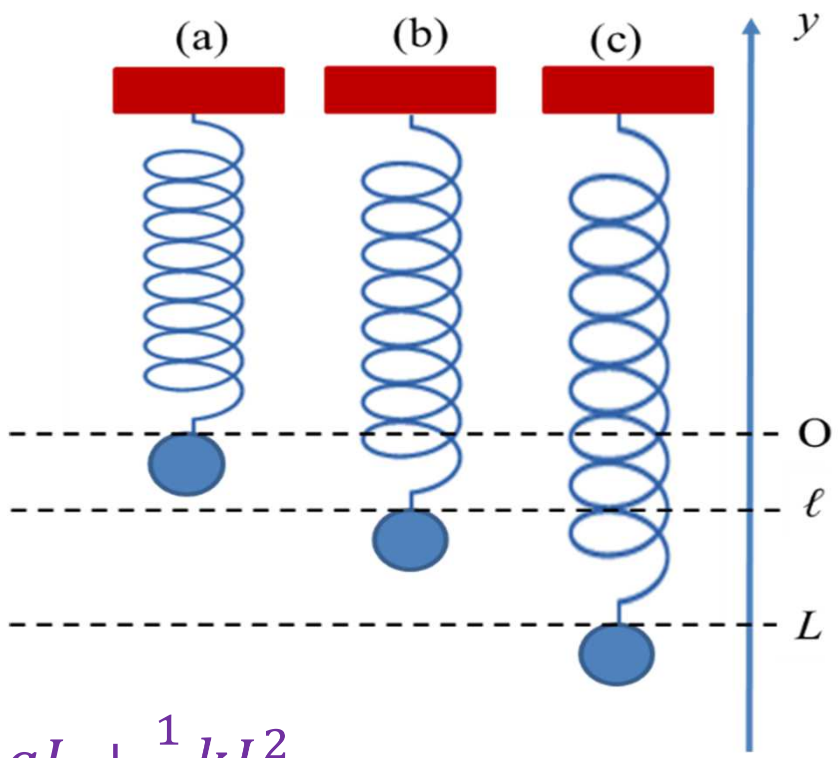
書き換えると $\frac{1}{2}mv^2=mg\ell-\frac{1}{2}k\ell^2$

「速さ」なので負の値は考えない！

(1)の結果をあわせて $\frac{1}{2}mv^2=\frac{(mg)^2}{k}-\frac{1}{2}k(\frac{mg}{k})^2=\frac{(mg)^2}{2k}$ $\therefore v=g\sqrt{\frac{m}{k}}$

ℓを用いると、$v=\sqrt{2g\ell-k\ell^2/m}$

(3) 物体の最下点でのばねの伸びLを求めよ



解答:

図(a)のy=0と図(c)の$y = -L$の間で力学的エネルギー保存則を適用すると、

ばねの自然長の位置を、重力と弾性力の位置エネルギーの基準点として、

$$\frac{1}{2}m0^2 + mg \times 0 + \frac{1}{2}k0^2 = \frac{1}{2}m0^2 - mgL + \frac{1}{2}kL^2$$

書き換えると $mgL = \frac{1}{2}kL^2$

$L \neq 0$より　$L = \frac{2mg}{k}$

ℓを用いると、$L = 2\ell$

(3)について

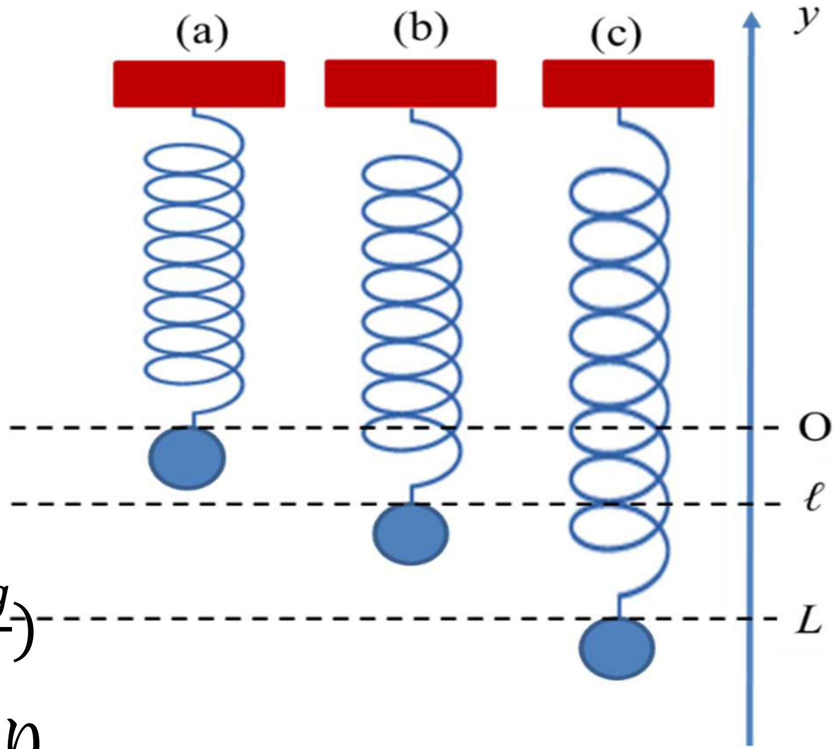
L=2 ℓ

とだけ答えている人が多かった。また、「振動しているので」ということを書いている人もいた

「振動」だけではL=2 ℓの理由にならない！

運動方程式を用いた解き方

右図のようにOを原点にとり、y軸は上向きを正とする



物体の運動方程式（空気抵抗は無視して）:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - ky$$

書き換えて　$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{k}{m}y = -\frac{k}{m}\left(y + \frac{mg}{k}\right)$

変数変換:　$x = y + \frac{mg}{k}$ とすると、$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$ より

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$　　ここで $\omega^2 = \frac{k}{m}$ とおくと　$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

これは教科書9. 1節から $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ という解を持つ(A, φは定数)

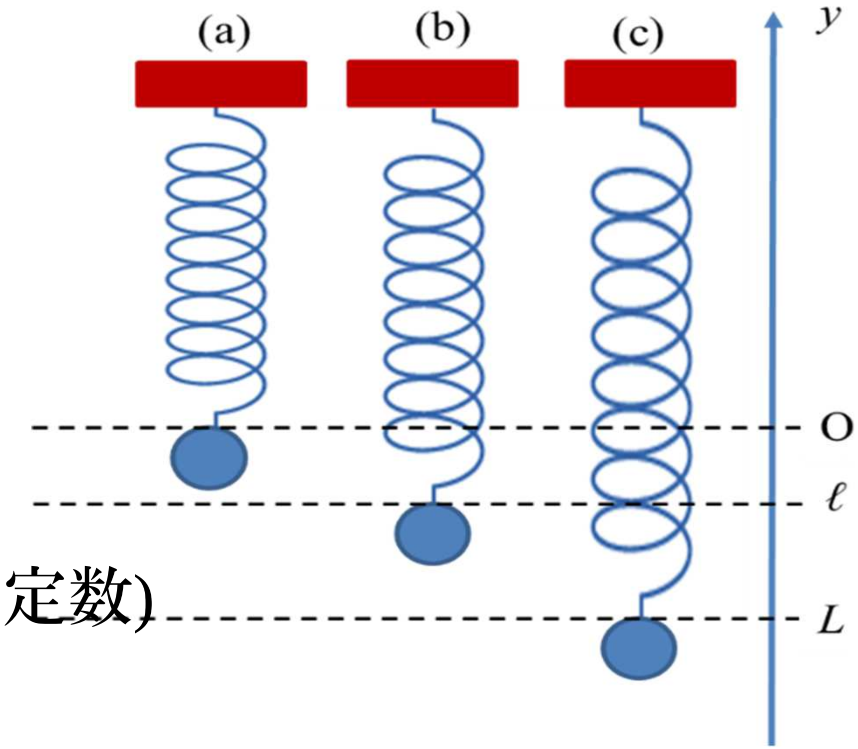
物体の運動方程式（空気抵抗は無視して）:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - ky$$

変数変換 $x = y + \frac{mg}{k}$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$　　ここで $\omega^2 = \frac{k}{m}$ とおくと

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$



$x = A\sin(\omega t + \varphi)$　という解を持つ(A, φは定数)

yに戻すと　$y + \frac{mg}{k} = A\sin(\omega t + \varphi)$

$$y = -\frac{mg}{k} + A\sin(\omega t + \varphi)$$

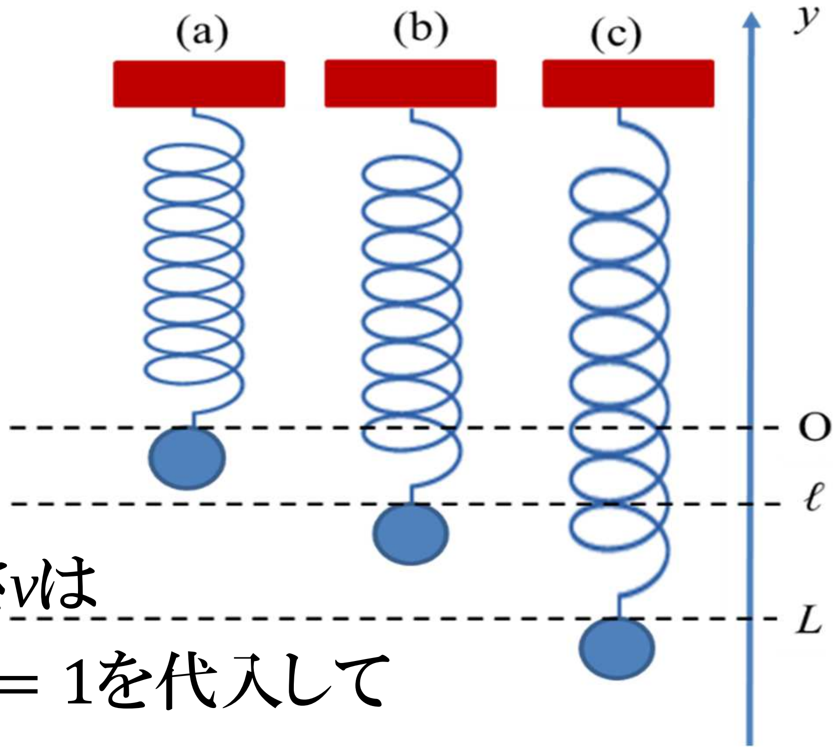
t=0で原点Oにあり、初速が0とすれば　$\frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$　から

$\varphi = \frac{\pi}{2}$　$A = \frac{mg}{k}$

よって、$y = \frac{mg}{k}\left(\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right)$

$$y = \frac{mg}{k}\left(\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right)$$

つまりこれは $y=-\frac{mg}{k}$ $(=-\ell)$ を中心として、振幅 $\frac{mg}{k}$、角振動数ω$\left(=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$ の単振動を表す。



これからつりあいの位置($y=-\ell$)のときの速さvは

$\frac{dy}{dt} = \frac{mg}{k}\omega\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ に $\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ を代入して

$$v = \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{m}} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

また $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -1$ をyに代入して $y = -2\frac{mg}{k}$ から $L=\frac{2mg}{k}$