物理学(15)

担当: 白井　英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

15章　**剛体の運動**

大きさをもつ剛体の運動を考える

剛体とは: 大きさを持ち、変形しない物体

つまり「変形」はここでは扱わない (構造力学や材料力学で扱う)

剛体運動の自由度

剛体運動の分類

- 並進運動
- 回転運動

並進運動では

剛体の重心の位置の指定---3つの位置座標

⇒　自由度３

回転運動では

回転軸の方向の指定---３つの回転軸まわりの回転角

⇒　自由度３

あわせて、剛体の運動の自由度は６

15.1 剛体の運動方程式

剛体を微小部分にわけ、それぞれを質点とみなす

⇒　構成質点間の相互の距離が変化しない質点系としての剛体

このことから、一般的に

質点系で成り立つことは剛体でも成り立つ

15.1 剛体の運動方程式(続き)

剛体の運動（剛体の質量をMとする）

並進運動 --- 重心(位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$とする)の運動方程式

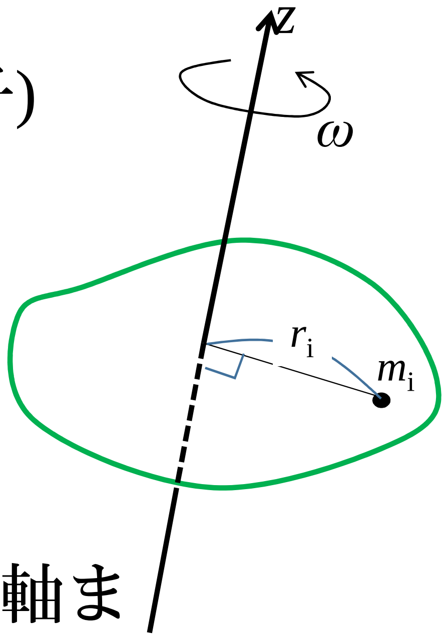
$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} = \boldsymbol{F} \qquad \text{(}\boldsymbol{F}\text{は剛体にはたらく外力の総和）} \qquad (15.1.1)$$

回転運動 --- 原点Oまわりの剛体の回転運動を考える

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

($\boldsymbol{L}$は剛体の角運動量、$\boldsymbol{N}$は外力モーメントの総和）(15.1.2)

15.2 固定軸の周りの回転運動



固定軸のまわりで回転する場合(例: 定滑車や振り子)

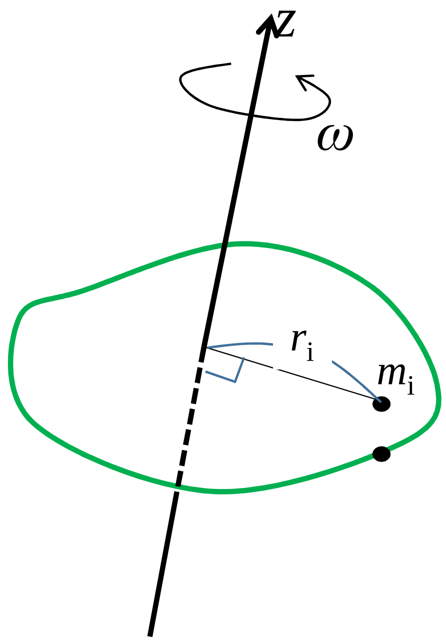
固定軸をz軸とすると、(15.1.2)のz成分：

$$\frac{d\boldsymbol{L}_z}{dt} = \boldsymbol{N}_z \qquad (15.2.3)$$

により、回転運動は決まる

剛体を微小部分に分割、i番目の部分の質量をm_i、z軸までの距離をr_iとする

15.2 固定軸の周りの回転運動(続)



剛体を微小部分に分割、i番目の部分の質量をm_i、z軸までの距離をr_iとする

基準位置からの回転角をθとし、剛体が角速度$\omega(=\frac{d\theta}{dt})$で回転するなら、これら$m_\mathrm{i}$はz軸の周りに同じ角速度ωで円運動する

それぞれの微小部分 m_iがもつ角運動量:

$$r_\mathrm{i}\, p_\mathrm{i} = r_\mathrm{i}\ m_\mathrm{i}\ r_\mathrm{i}\, \omega$$

よって、剛体全体が持つ角運動量はこれらの和:

$$L_\mathrm{z} = \sum_i r_\mathrm{i}\ m_\mathrm{i}\ r_\mathrm{i}\, \omega = \omega \sum_i r_{\mathrm{i}\,2}\, m_\mathrm{i}$$

15.2 固定軸の周りの回転運動(続)

それぞれの微小部分 m_iがもつ角運動量:

$$r_i p_i = r_i\ m_i\ r_i\,\omega$$

よって、剛体全体が持つ角運動量:

$$L_z = \sum_i r_i\ m_i\ r_i\,\omega = \omega \boxed{\sum_i r_i^2 m_i}$$

対比:並進の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

において質量m は並進運動のしにくさを表す

ここで、 $I_z = \sum_i r_i^2 m_i = r_1{}^2 m_1 + r_2{}^2 m_2 + \ldots$ とする

I_z は z軸周りの慣性モーメント (単位は kg· m^2)

慣性モーメントは回転運動のしにくさを表す

$$L_z = I_z\,\omega \qquad (15.2.6)$$

この式を(15.2.3)に代入(I_zは一定)

$$I_z\frac{d\omega}{dt} = \boldsymbol{N}_z$$

あるいは

$$I_z\frac{d^2\theta}{dt^2} = \boldsymbol{N}_z$$

回転の運動方程式

回転の運動方程式 $I_z \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \boldsymbol{N}_z$ (15.2.8)

慣性モーメント

$$I_z = \sum_i r_i^2 m_i = r_1{}^2 m_1 + r_2{}^2 m_2 + \dots \qquad (15.2.5)$$

この式から言えること

回転軸から離れたところに大きな質量があるとI_zが大きい
⇒ 慣性モーメントが大きい ⇒ 回転しにくい

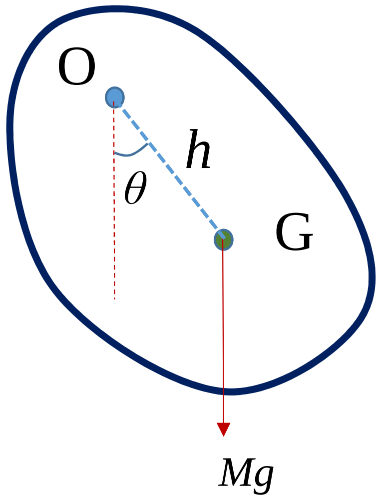
外力モーメントの和 $N_z=0$ ならば角速度(ω)は一定
⇒回転しない、もしくは等角速度の回転

例題15.1 剛体振り子

剛体を水平な固定軸の周りに自由に回転できるようにしたもの

⇒ 重力の作用によって振らせることができる

剛体振り子の微小振動の周期を求めよ。



[解] 右図のように剛体の質量をM、 固定軸をO、重心をG、Gから軸Oまでの距離をh、軸Oの周りの慣性モーメントをIとする。また線分OGが鉛直下方となす角θによって回転角を表すことにする。

式(15.2.8) に相当する式は：

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\sin\theta$$

これを変形して　$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha\sin\theta$　ただし　$\alpha = Mgh/I$

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin\theta$　　ただし　$\omega^2 = Mgh / I$

ここで、微小振動の場合は(9.4.50)と同様に

$$\sin\theta \fallingdotseq \theta$$

とみなせるので、$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta$　と近似できる

これから、$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \alpha)$　という一般解が得られる（α、θ_0 は初期条件によってきまる定数）

よって剛体振り子が微小振動する場合の周期Tは

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$$

15.3 慣性モーメントの計算例

剛体の慣性モーメントの計算の役にたつ定理

薄板の直交軸定理

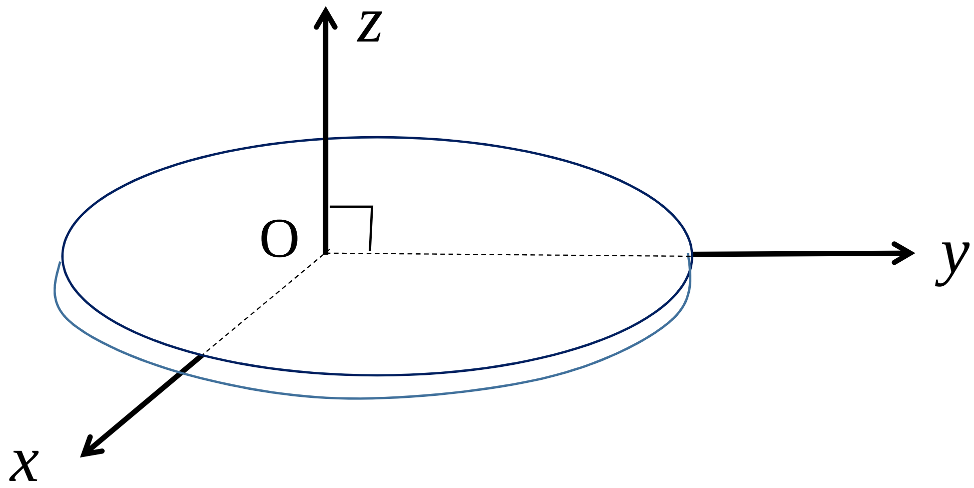
平行軸定理

定理15.2 薄板の直交軸定理

図のような薄板について、薄板内のO点を原点とし、互いに直交するx軸とy軸を薄板内にとり、薄板と直交する方向にz軸を取る。

すると、x軸、y軸の周りの薄板の慣性モーメントI_x, I_yと、z軸の周りの慣性モーメントI_zの間には次が成り立つ:

$$I_\mathrm{z} = I_\mathrm{x} + I_\mathrm{y}$$

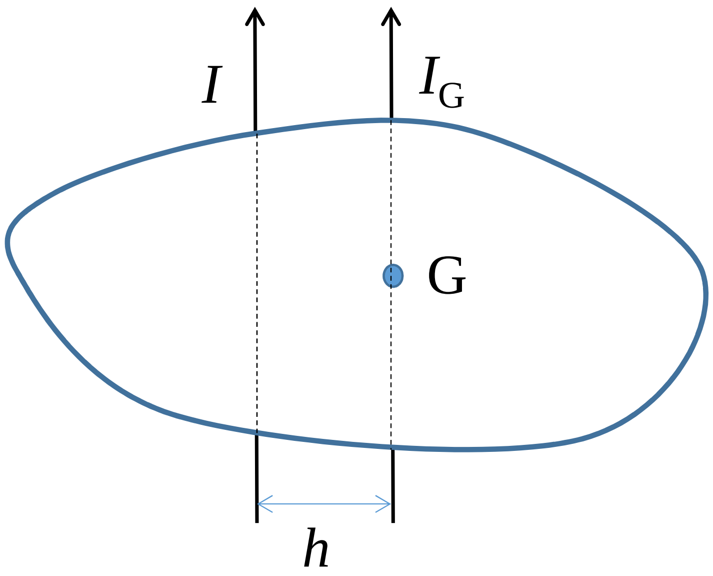


定理15.3 平行軸定理

剛体の重心Gを通る軸の周りの慣性モーメントI_Gがわかると、その軸と並行で距離hだけ離れた軸の周りの慣性モーメントIは次で与えられる：

$$I = I_G + Mh^2 \tag{15.3.12}$$

ここでMは剛体の質量である。



ここから
重心を回転軸としたときの慣性モーメントが最小
がわかる！

いろいろな剛体の慣性モーメント

慣性モーメントI_zの定義式：固定軸をz軸とし、剛体を微小部分に分割、i番目の部分の質量をm_i、z軸までの距離をr_iとする

$$I_z = \sum_i r_i^2 m_i = r_1{}^2 m_1 + r_2{}^2 m_2 + \dots \qquad (15.2.5)$$

dI_zを微小部分の慣性モーメント、dmを微小部分の質量、rを微小部分から回転軸までの距離とすると

$$I_z = \int dI_z = \int r^2 dm \qquad (15.3.13)$$

剛体の慣性モーメント (1)細い棒

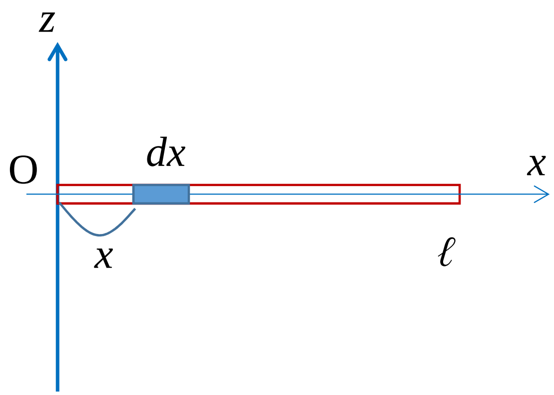
剛体の質量をM、線密度をρ、回転軸をzとする：

(a) 棒の端O点を原点とする座標系

O点からxの位置にある微小部分の質量

$$dm = \rho\, dx = \frac{M}{\ell}dx$$

したがって $$I_z = \int x^2 dm = \int_0^\ell x^2 \frac{M}{\ell} dx = \frac{1}{3}\ell^3 M$$



剛体の慣性モーメント (1)細い棒

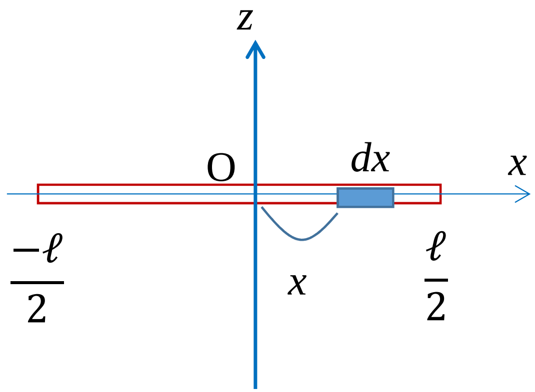
(b)棒の重心O点を原点とする座標系

O点からxの位置にある微小部分の質量

$$dm = \rho\, dx = \frac{M}{\ell}dx$$

したがって

$$I_z = \int x^2 dm = \int_{-\frac{1}{2}\ell}^{\frac{1}{2}\ell} x^2 \frac{M}{\ell} dx = \frac{1}{12}\ell^3 M$$

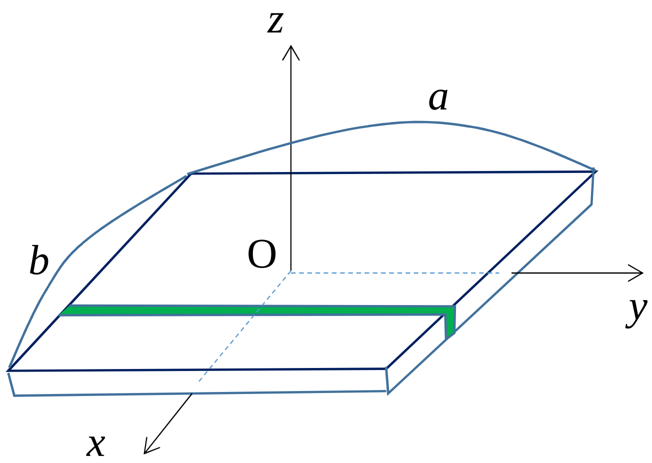


参考:　棒の端を原点とした (a)では　$I = \int x^2 dm = \int_0^{\ell} x^2 \frac{M}{\ell} dx = \frac{1}{3}\ell^3 M$

平行軸定理から　$I = I_Z + M(\frac{\ell}{2})^2 = \frac{1}{12}\ell^3 M + \frac{1}{4}\ell^3 M = = \frac{1}{3}\ell^3 M$　となり正しさが確認できる

剛体の慣性モーメント (2) 長方形の板

辺の長さをそれぞれa, bとする長方形の板
中心O点を原点とする座標系を取る



x軸まわりの慣性モーメントI_x
　質量dm、長さaの細い棒の集まりに分割して考える:
　(1)の結果を用いて緑の部分の慣性モーメントが$\frac{1}{12}a^2dm$から

$$I_x = \int \frac{1}{12}a^2dm = \frac{1}{12}a^2M$$

同様にy軸まわりの慣性モーメント
$$I_y = \frac{1}{12}b^2M$$

薄板の直交定理から　$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12}(a^2 + b^2)M$

剛体の慣性モーメント (3) 直方体

辺の長さをそれぞれa, b, cとする直方体

中心O点を原点とする座標系を取る

質量dm、辺の長さa, bの長方形の板の集まりに分割して考える

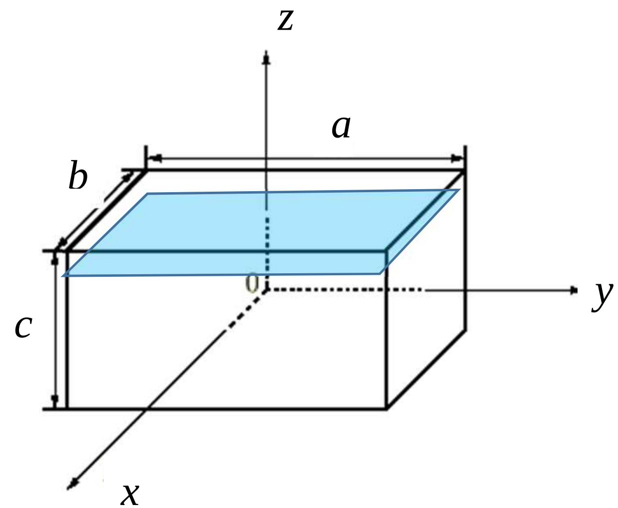
(2)の結果を用いて青の部分の慣性モーメントdI_z

$$dI_z = \frac{1}{12}(a^2 + b^2)dm$$

$I_z = \int dI_z$ より

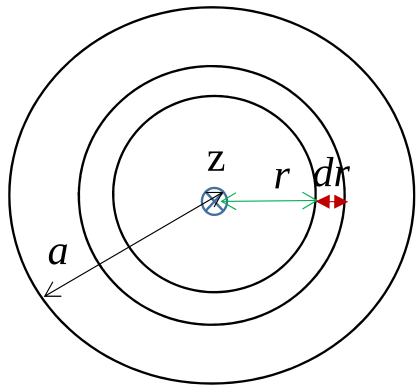
($\int dm = M$ を使う）

$$I_z = \int dI_z = \int \frac{1}{12}(a^2 + b^2)dm = \frac{1}{12}(a^2 + b^2)M$$



剛体の慣性モーメント (4) 円板

円板は薄く、半径をa、面密度をρとする
(円板の質量Mを使えば$\rho = \frac{M}{\pi a^2}$)



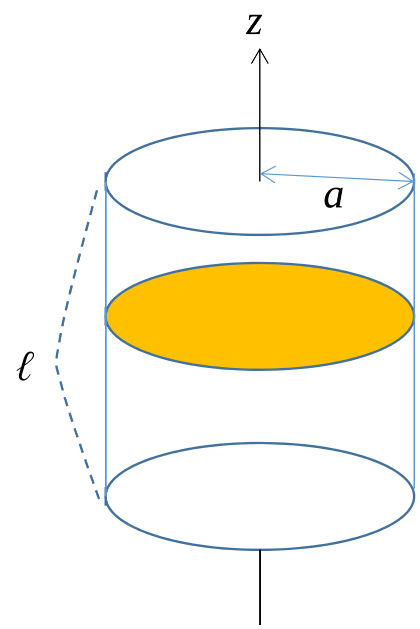
半径rと$r+dr$で囲まれた微小な円環部分を考える
この部分の質量$dm = \rho(2\pi r)dr$ とみなせる
この部分の慣性モーメント

$$dI_z = r^2 dm = \frac{M}{\pi a^2}(2\pi r^3)dr = \frac{2M}{a^2} r^3 dr$$

これから $I_z = \int dIz = \int_0^a \frac{2M}{a^2} r^3 dr = \frac{2M}{a^2}(\frac{a^4}{4}) = \frac{1}{2} a^2 M$

剛体の慣性モーメント (5) 円柱

断面半径a, 高さℓの円柱。その中心点Oを原点とし、中心軸方向にz軸を取って考える



質量dm、半径aの円板の集まりに分割して考える

(4)から、この薄い円板の慣性モーメントdI_zは

$$dI_z = \frac{1}{2} a^2 dm$$

この積分を求める: ($\int dm = M$ を用いる)

$$I_z = \int dI_z = \int \frac{1}{2} a^2 dm = \frac{1}{2} a^2 M$$

剛体の慣性モーメント (6) 球

密度ρ、半径aの球に対し、その中心点Oを原点とする座標系をとる

右図のように位置z、厚さdz、半径$\sqrt{a^2 - z^2}$の円板を考える

その質量 $dm = \pi\rho(a^2 - z^2)dz$

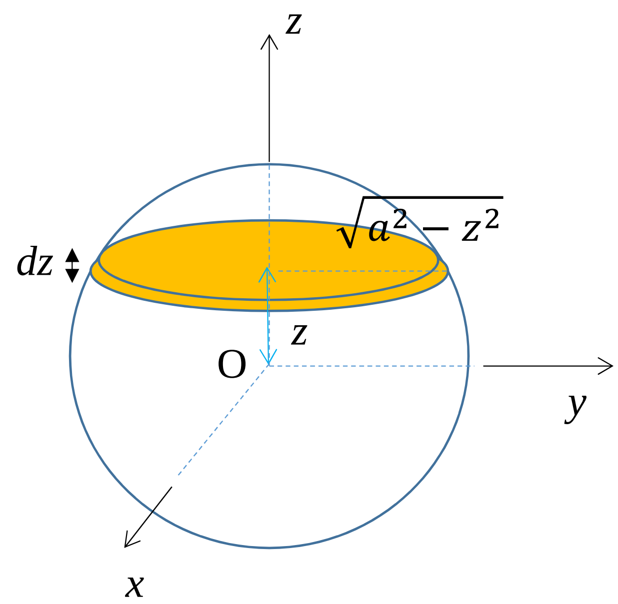
その部分の慣性モーメント

$$dI_z = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - z^2}^2 dm = \frac{1}{2}\pi\rho(a^2 - z^2)^2 dz$$

これらの積分を考えると

$$I_z = \int dI_z = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\pi\rho(a^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15}\pi\rho a^5$$

ここで$M = \frac{4}{3}\pi a^3$ を用いると$I_z = \frac{2}{5} a^2 M$



15.4 剛体の平面運動

剛体の平面運動：

剛体が回転軸の周りに回転、

かつ、回転軸(≒重心)が平行移動する運動

運動方程式：

並進運動 $$M\frac{d^2\boldsymbol{x}_G}{dt^2}=\boldsymbol{F} \qquad (15.1.1)$$

$\boldsymbol{F}$は剛体にはたらく外力の総和、$\boldsymbol{x}_G$は重心の位置

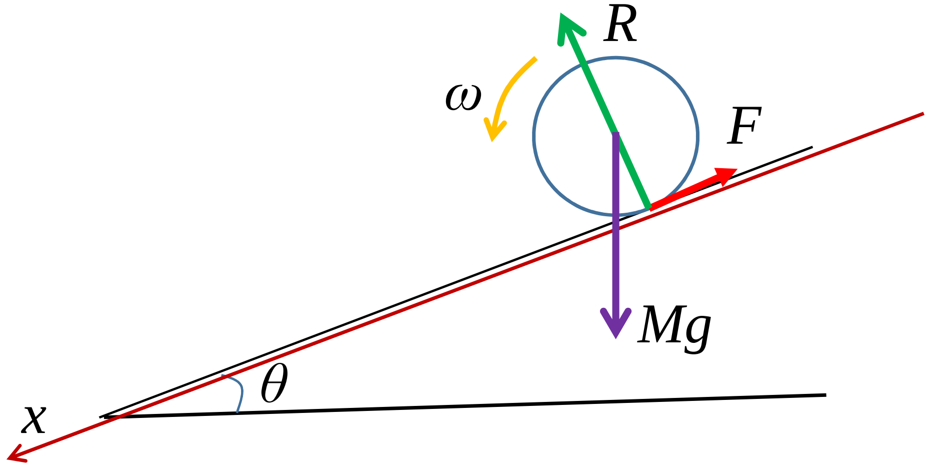
回転運動 $$I\frac{d\omega}{dt}=\boldsymbol{N} \qquad (15.1.2)$$

$\boldsymbol{I}$は慣性モーメント、$\boldsymbol{N}$は外力モーメントの総和

例題15.4 斜面を転がり落ちる円柱

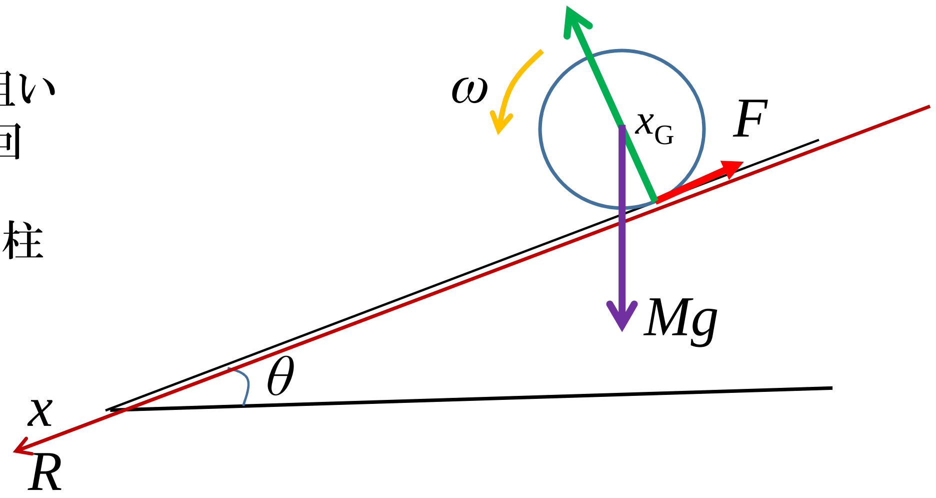
半径a、質量Mの密度一様な円柱が、水平と傾角θをなす粗い斜面上をすべらずに転がり落ちるとき、重心の加速度、回転の角速度、摩擦力の大きさをそれぞれ求めよ。

　また、静止摩擦係数がμのとき、斜面に静かに置いた円柱がすべらずに転がるための条件を求めよ。



例題15.4 斜面を転がり落ちる円柱

半径a、質量Mの密度一様な円柱が、水平と傾角θをなす粗い斜面上をすべらずに転がり落ちるとき、重心の加速度、回転の角速度、摩擦力の大きさをそれぞれ求めよ。
　また、静止摩擦係数がμのとき、斜面に静かに置いた円柱がすべらずに転がるための条件を求めよ。



[解］斜面にそって下方にx軸を取り、重心の座標をx_G、円柱の中心軸の周りの回転の角速度をω、斜面に沿って情報にはたらく摩擦力をFとする。

並進運動の運動方程式：

$$M\frac{d^2x_G}{dt^2} = Mg\sin\theta - F \quad (15.4.15)$$

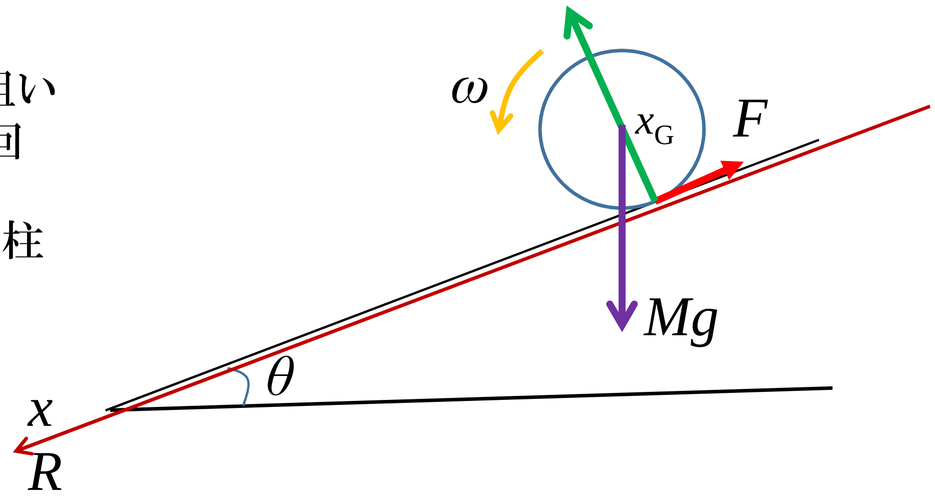
回転運動の運動方程式(Iは慣性モーメント）：

$$I\frac{d\omega}{dt} = aF \quad (15.4.16)$$

これを解くにはIを求める必要がある: p.182-3の式から $I = \frac{1}{2}a^2M$

例題15.4 斜面を転がり落ちる円柱

半径a、質量Mの密度一様な円柱が、水平と傾角θをなす粗い斜面上をすべらずに転がり落ちるとき、重心の加速度、回転の角速度、摩擦力の大きさをそれぞれ求めよ。
　また、静止摩擦係数がμのとき、斜面に静かに置いた円柱がすべらずに転がるための条件を求めよ。



並進運動の運動方程式：

$$M\frac{d^2 x_G}{dt^2} = Mg\sin\theta - F \quad (15.4.15)$$

回転運動の運動方程式(Iは慣性モーメント）：

$$\frac{1}{2}a^2 M\frac{d\omega}{dt} = aF \quad (15.4.16)$$

斜面をすべらず回転することから

$$\frac{d^2 x_G}{dt^2} = a\frac{d\omega}{dt} \quad (15.4.17)$$

これを解いて、

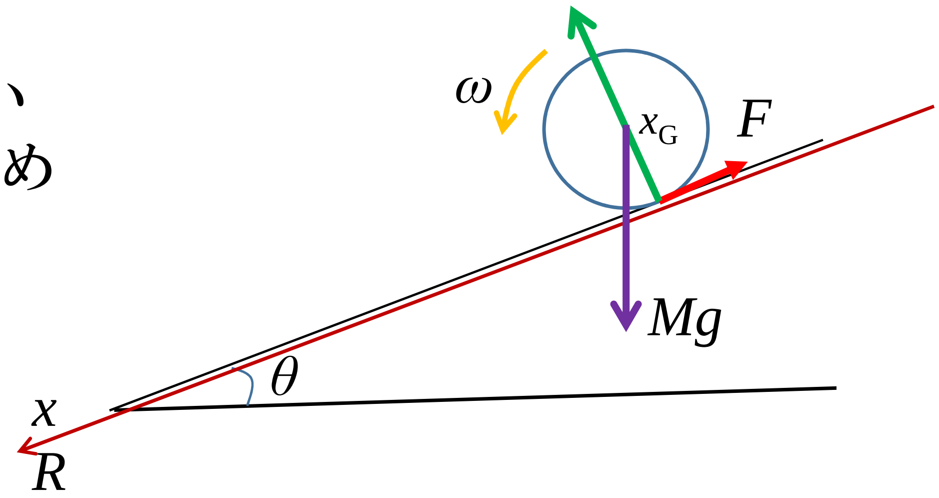
重心の加速度$\frac{d^2 x_G}{dt^2} = \frac{2}{3}g\sin\theta$

回転の角速度$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3a}g\sin\theta$

摩擦力$F = \frac{1}{3}Mg\sin\theta$

例題15.4 斜面を転がり落ちる円柱

静止摩擦係数がμのとき、斜面に静かに置いた円柱がすべらずに転がるための条件を求めよ。



[解] 斜面の垂直抗力をRとする。

斜面に垂直な方向の重心の運動方程式（つりあい）

$$R = Mg\cos\theta$$

より、最大静止摩擦力は

$$\mu R = \mu Mg\cos\theta$$

これより、すべらない条件は

$$F = \frac{1}{3} Mg\sin\theta \leqq \mu Mg\cos\theta$$

これにより

$$\frac{1}{3}\tan\theta \leqq \mu$$