

# 中京大学工学部電気電子工学科

学科目	物理学	出題者	白井 英俊	試験日	2015年 6月 1日 月曜日 実施
注意事項	指定用紙と通信機能のない電卓、時計のみ持ち込み許可。解答の順番は自由。不正行為者に対しては、物理学の単位をFとする。				

本試験において、特に断りがない場合は、重力加速度の大きさを  $g[m/s^2]$  とする。

問題1. 火星の半径はおよそ  $3.4 \times 10^3$  km、質量はおよそ  $6.4 \times 10^{23}$  kg である。また、自転周期はおよそ 25 時間である。万有引力定数  $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  であることを用いて以下の間に答えよ。計算には、円周率  $\pi = 3.14$  を用いよ。計算式を書き、答は有効数字の桁数を考慮し、単位を明記すること。

(1) 火星における重力加速度の大きさを求めよ。

万有引力の法則から、半径  $R$ 、質量  $M$  により  $GM/R^2$  である。計算すると  $3.709 \doteq 3.7 \text{ m/s}^2$

(2) 火星上で周期が 2.0 s の単振り子を作りたい。この振り子の糸の長さを求めよ。

振り子の周期  $T$  は、長さを  $l$ 、重力加速度の大きさを  $g$  とすれば、 $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  であるから  $l = g(T/2\pi)^2 \doteq 0.38 \text{ m}$

(3) 火星の自転の角速度を求めよ。

自転の周期  $T$  が 25 時間  $= 9.0 \times 10^4 \text{ s}$  であることから角速度  $= 2\pi/T = 6.98 \times 10^{-5} \doteq 7.0 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$

(4) 火星の赤道の地表面に置かれた質量 1.0 kg の質点にはたらく「火星の自転による遠心力の大きさ」を求めよ。

半径  $r$  の円周を角速度  $\omega$  で等速円運動をする質量  $m$  の物体にはたらく遠心力の大きさは  $m r \omega^2$  だから  $0.0166 \doteq 1.7 \times 10^{-2} \text{ N}$

問題2 右図のように、水平でなめらかな床の上に長さ  $l$  [m]、質量  $M$  [kg] の薄い板が静止しており、その板の左端に質量  $m$  [kg] の人が立っている。人の厚みは無視できるものとし、重力加速度の大きさを  $g[m/s^2]$  とする。



(1) 板の左端を原点にとり、水平方向に  $x$  軸を取る（右向きを正とする）。このとき、板と人を一体とみなした時の重心の位置を次のようにして求めよ。ここで重心の位置が板の左端から  $x$  [m] の位置にあるとし、板の左端点まわりの力のモーメントを考える。(a) 人と板の質量による力のモーメントの和が、(b) 重心に「人と板の質量の総和」がかかっていると考えたときの力のモーメントを求め、(a)=(b) から板の重心の位置  $x_G$  を  $M, m, l$  で表わす。

(a)  $lMg/2 = (b) (M+m)g x_G$  ゆえに  $x_G = lM / (2(M+m))$  [m]

(2) この人が板の上を、板に対して(相対的な)速さ  $v$  [m/s] で右方向に歩くとする。このとき板の速度の大きさと向きを求めよ。

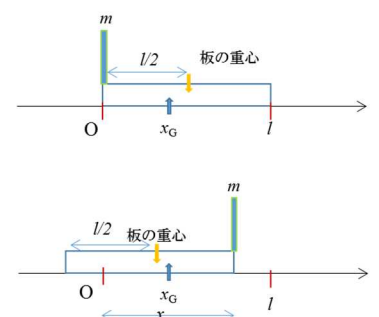
動く前の運動量は 0 動き始めてからの(床に対する)板の速度を  $V$  [m/s] とすると、人は床に対して  $v+V$  [m/s] で動くことになる  $m(v+V) + MV = 0$   
 これから  $V = -m v / (m+M)$  [m/s] ゆえに速さは  $mv / (m+M)$  [m/s]、向きは左向き

(3) この人が板の上を、板から水平右向きに一定の力  $f$  [N] を受けて動くとする（ヒント：「板から力」ということは、作用反作用によって板も動く）。動き始めてから時間が  $t$  [s] だけ経過したとき、この人が板の上で移動した距離を求めよ。ただしこの時点において、この人はまだ板の右端には到達していないものとする。

人についての運動方程式: は位置を  $x$  とし  $m\ddot{x} = f$  よって  $t$  [s] に移動した距離は  $x = (f/m)t^2/2$   
 このとき床も動いており、その運動方程式は位置を  $x$  とし  $M\ddot{x} = -f$  よって  $t$  [s] に移動した距離  $x = -(f/M)t^2/2$   
 ゆえに板の上で移動した距離はこの差である:  $(f/m)t^2/2 + (f/M)t^2/2 = \frac{t^2}{2} \left( \frac{f}{m} + \frac{f}{M} \right) = \frac{ft^2(M+m)}{2mM}$  [m]

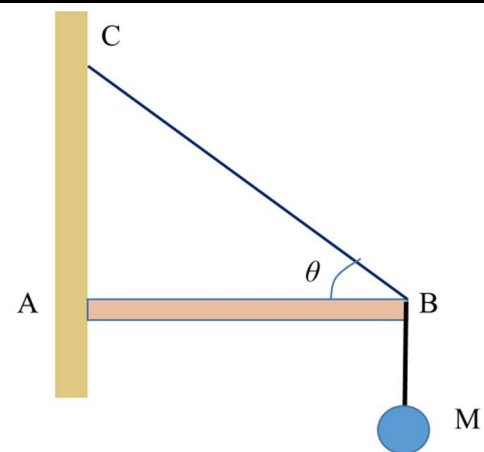
(4) この人が板の上を左端から右端まで静かに移動した時、この人は床に対してどれだけ進んだことになるか？（ヒント：板も動くが板と人からなる系の重心は（外力がないので）動かない。人が床に対して進んだ距離を  $x$  [m] とし、まず移動後の板の重心の位置を  $x$  を用いて表す。そしてそれが(1)の値と等しくなることを用い、 $x$  を求める---ややこしいので図を書いて考えよう)

右図から、O 点回りの力のモーメント:  $x_G(M+m) = mx + (x-l/2)M$   
 これより、 $x_G = (mx + (x-l/2)M) / (M+m)$  これが(1)の値  $lM / (2(M+m))$  と等しい  
 $2(mx + (x-l/2)M) = lM$   $2(m+M)x = 2lM$  故に  $x = lM / (M+m)$



工 学部 電気電子工学科	年	番号								名前	点数
--------------	---	----	--	--	--	--	--	--	--	----	----

問題3. 長さが  $l$  [m] で質量  $M$  [kg] の一様な棒 AB の A 端を鉛直な粗い壁面に押し当て、B 端を軽く伸び縮みしない糸で結び、糸の他端を C 点に固定した。ここで B 端に質量  $M$  [kg] のおもり  $M$  を吊り下げたところ、棒は A 点で壁に垂直な姿勢を保ち、糸と棒とのなす角は  $\theta=30^\circ$  となった。重力加速度の大きさを  $g$  [m/s<sup>2</sup>] として以下の間に答えよ。



(1) 棒にかかる力のつり合いの式を、水平方向と鉛直方向に分けて書け。ただし糸の張力の大きさを  $T$  [N]、A 点での摩擦力の大きさを  $f$  [N]、垂直抗力の大きさを  $N$  [N] で表す。

水平方向: (右向き正)  $N - T\cos\theta = 0$  または  $N - \sqrt{3}T/2 = 0$

垂直方向: (上向き正)  $T\sin\theta + f - 2Mg = 0$  または  $T/2 + f - 2Mg = 0$

(2) (1)の記号を用いて、A 点まわりの力のモーメントの釣り合いの式を書け。

反時計回りが正  $Tl\sin\theta - Mgl - Mgl/2 = 0$  または  $lT/2 - Mgl - Mgl/2 = 0$

(3) (1), (2)の結果から、糸の張力の大きさ  $T$ 、A 点の垂直抗力の大きさ  $N$ 、摩擦力の大きさ  $f$  をそれぞれ求めよ。(注意: 答には数値以外に、 $l, M, g$  の中の適切な記号だけを用いよ)

A 点まわりの力のモーメントの釣り合いの式から  $T = 3Mg$

これにより、 $N = 3\sqrt{3}Mg/2$

また  $f = Mg/2$

(4) おもり  $M$  の吊り下げ位置を B 点から A 点の方にゆっくり移動させたところ、B 点から距離  $x$  [m] の位置で棒の A 端が滑り始めた。壁と棒との最大静止摩擦係数を  $\mu$  とする。またここでも糸の張力の大きさを  $T$  [N]、A 点での垂直抗力の大きさを  $N$  [N] で表すとする (注意: (1)の値とは異なる。)。注意: (c), (d)は答だけではなくそれを導く計算式 (と簡単な説明) も書くこと

(a) 棒にかかる力のつり合いの式を、水平方向と鉛直方向に分けて書け。

水平方向: (右向き正)  $N - T\cos\theta = 0$  または  $N - \sqrt{3}T/2 = 0$  ①

静止摩擦力は、題意から最大静止摩擦力になるので、

垂直方向: (上向き正)  $T\sin\theta + \mu N - 2Mg = 0$  または  $T/2 + \mu N - 2Mg = 0$  ②

(b) B 点まわりの力のモーメントの釣り合いの式を書け。

$-\mu Nl + Mgx + Mgl/2 = 0$  ③

(c)  $l, M, g, \mu, x$  の中の適切な記号を用いて  $T$  と  $N$  の値を表わせ。

③から  $\mu N = Mg(x/l + 1/2)$  ゆえに  $N = Mg(2x + l)/(2\mu l)$

これを①に代入して、 $T = Mg(2x + l)/(\sqrt{3}\mu l)$

もしくは ②に代入して  $T = 4Mg - Mg(2x + l)/l = Mg(3l - 2x)/l$

(d)  $x$  を求めよ。ただし、この答には数値以外に、 $l, \mu, g$  の中の適切な記号だけを用いよ。

(c)の結果から、 $Mg(3l - 2x)/l = Mg(2x + l)/(\sqrt{3}\mu l)$

$Mg \neq 0$  より  $\sqrt{3}\mu(3l - 2x) = (2x + l)$

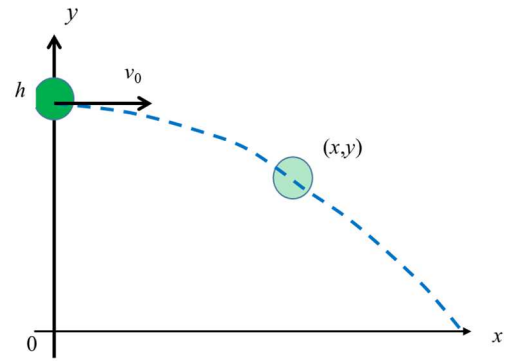
これから  $2(\sqrt{3}\mu + 1)x = (3\sqrt{3}\mu - 1)l$

故に  $x = \frac{3\sqrt{3}\mu - 1}{2(\sqrt{3}\mu + 1)}l$

中京大学工学部電気電子工学科

学科目	物理学	出題者	白井 英俊	試験日	2015年 6月 1日 月曜日 実施
注意事項	指定用紙と通信機能のない電卓、時計のみ持ち込み許可。解答の順番は自由。不正行為者に対しては、物理学の単位をFとする。				

問題4. 右図のように、時刻  $t = 0$  において質量  $m$  [kg] の小物体を地表  $h$  [m] の高さの点から速さ  $v_0$  [m/s] で水平方向に投げた。この小物体が地表に落ちるまでの運動を考えよう。



ここで、地面に平行に  $x$  軸、垂直に  $y$  軸をとって小物体の位置を表す。

注意: (2)以降は答だけではなくそれを導く計算式(と簡単な説明)も書くこと

(1) 空気の抵抗が、小物体の質量と速度の積に比例するものとする(空気抵抗の比例係数を  $k$  とする)。このときの運動方程式を答えよ。(注意: 運動の  $x$  成分と  $y$  成分、それぞれに式を立てる)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -km v_x$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -gm - km v_y$$

(4) この物体の速度を表す式を求めよ。(注意: 運動の  $x$  成分  $v_x$  と  $y$  成分  $v_y$ 、それぞれの式を立てる)

(1)の式から、

$$\frac{1}{v_x} \frac{dv_x}{dt} = -k \quad \therefore v_x = C e^{-kt} \quad (C \text{ は定数})$$

初期条件( $t=0$  での  $x$  方向の速度)から、 $v_x = v_0 e^{-kt}$

$$\frac{dv_y}{dt} = -k \left( \frac{g}{k} + v_y \right)$$

$$\frac{1}{(v_y + \frac{g}{k})} \frac{dv_y}{dt} = -k \quad \therefore \log(v_y + \frac{g}{k}) = -kt + C \quad (C \text{ は定数})$$

よって、 $v_y + \frac{g}{k} = C' e^{-kt}$

初期条件( $t=0$  での  $y$  方向の速度)から、 $v_y = \frac{g}{k} (e^{-kt} - 1)$

(5) この物体の位置を表す式をそれぞれ求めよ。(注意: 運動の  $x$  成分と  $y$  成分、それぞれに式を立てる)

(4)式から

$$x = \frac{-1}{k} v_0 e^{-kt} + C' \quad (C' \text{ は定数})$$

初期条件( $t=0$  での  $x$  方向の位置)から、 $x = \frac{-1}{k} v_0 (e^{-kt} - 1)$

$$\text{同様に、} y = \frac{g}{k} \left( \frac{-1}{k} e^{-kt} - t \right) + C' \quad (C' \text{ は定数})$$

初期条件( $t=0$  での  $x$  方向の位置)から、 $y = \frac{g}{k} \left( \frac{-1}{k} (e^{-kt} - 1) - t \right) + h$

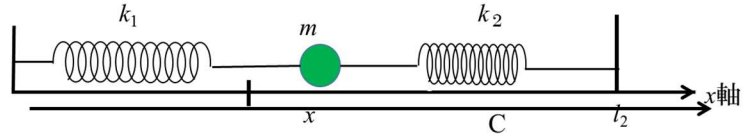
(6)  $h$  がとても大きい場合は地表面に落ちることなく運動が続く。その状況において、とても長い時間がたった時の速度(終速度)を求めよ。

$$(4) \text{の結果から、} \lim_{t \rightarrow \infty} v_x = \lim_{t \rightarrow \infty} v_0 e^{-\frac{k}{m}t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g}{k} (e^{-kt} - 1) = \frac{-g}{k} \quad \text{したがって、} \frac{-g}{k} \text{ [m/s]}$$

工 学部 電気電子工学科	年	番号	.....	名前	.....	点数	.....
--------------	---	----	-------	----	-------	----	-------

問題5 右図のように自然長がそれぞれ $l_1, l_2$ で、バネ定数が $k_1, k_2$ の2本のばねにつながれて、なめらかな水平面に置かれた質量 $m$ の質点の振動運動を考える。2本のばねがともに自然長の位置を原点として $x$ 軸を設定する。(1)この質点の位置が $x$ のときの運動方程式を書け。

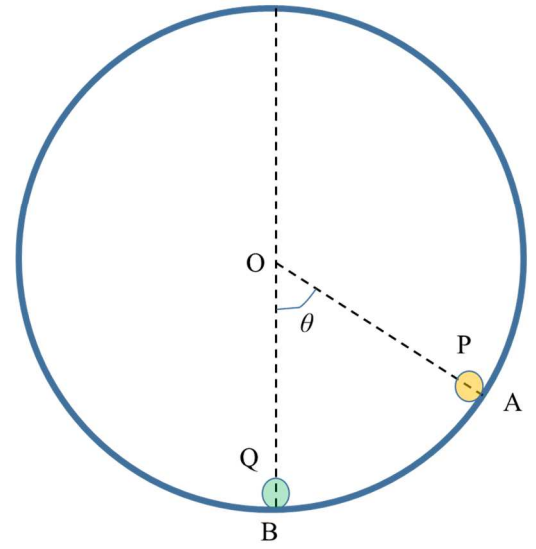


$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1+k_2)x$$

(2) この質点は単振動する。その周期を求めよ。

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

問題6 右図は半径 $r$ [m]のなめらかな円筒の鉛直断面の図である。円筒の中心点を $O$ 、その真下の円筒内面の点を $B$ 、その真上の円筒内面の点を $C$ とする。また円筒内面の点 $A$ は $O$ 点と結んだ線 $OA$ が $OB$ と角 $\theta$ をなす点である。



その点 $A$ 上に質量 $M$ [kg]の質点が、点 $B$ 上には質量 $m$ [kg]の質点 $Q$ がある。

質点 $P$ と $Q$ はともにこの平面内で運動する。ここで質点 $P$ が静止状態から円筒にそって滑り落ちて質点 $Q$ と完全弾性衝突した。以下では重力加速度の大きさを $g$  [m/s<sup>2</sup>]として計算せよ。ただし、答だけではなく、それを求める計算式と説明も書くこと。なお必要ならば、位置エネルギーの基準点を $B$ 点(の高さ)と考えよ。

(1) 衝突直前の $P$ の速さ $V$ を、 $M, g, r, \theta$ のうち適切なものを用いて表わせ。

$$\text{力学的エネルギー保存則 } Mgr(1-\cos\theta) = MV^2/2 \quad \text{これより } V = \sqrt{2gr(1-\cos\theta)}$$

(2) 衝突直前の $P$ の速さを $V$ とする。衝突後の質点 $Q$ の速さ $v$ を $M, m, V$ を用いて表わせ。

$$\text{衝突後の } P \text{ の速度を } V' \text{ とする(左方向正)。運動量保存則: } MV = mv + MV'$$

$$\text{反発係数: } V = v - V' \quad MV = Mv - MV' \quad \text{ゆえに } (M+m)v = 2MV$$

$$\text{これから } v = 2MV/(M+m)$$

(3) 点 $Q$ が円筒にそって運動し、 $O$ の真上の点 $C$ に到達するための条件を、衝突後の質点 $Q$ の速さを $v$ として、 $v, g, r$ を用いて表わせ(ヒント: 点 $C$ に到達したときの質点 $Q$ の速さを求め、それを用いて $C$ 点における遠心力が計算できる。この遠心力はどのような大きさでなければならないだろうか?)

$C$  点に到達するとする。その時の速さを $v'$ とすると、

$$\text{力学的エネルギー保存則 } mv^2/2 = mv'^2/2 + 2rmg \quad \text{これから } v'^2 = v^2 - 4gr$$

また $C$  点での遠心力は、 $mv'^2/r$  これは重力 $mg$  よりも大きくないと落ちてしまう。

$$\text{ゆえに、} \quad mv'^2/r = m(v^2 - 4gr)/r \geq mg$$

$$v^2 \geq 5gr$$

(4)  $\theta = \pi/2$  とする。質点 $Q$ が円筒にそって運動し、 $O$ の真上の点 $C$ に到達するためには、 $M$ は $m$ の何倍以上でなければならないか、答えよ。

$$\theta = \pi/2 \text{ であるから、(1)の答 } V = \sqrt{2gr(1-\cos\theta)} = \sqrt{2gr}$$

$$(2) \text{に代入して、} v = 2MV/(M+m) = 2M\sqrt{2gr}/(M+m)$$

$$(3) \text{から、} (2M\sqrt{2gr}/(M+m))^2 \geq 5gr \quad M/(M+m) \geq \sqrt{5/8} \quad M \geq \sqrt{5/8}(M+m)$$

$$a = \sqrt{5/8} \text{ とおくと、} M \geq a(M+m) \quad (1-a)M \geq am \quad M \geq m \times (1-a)/a \quad \sqrt{5/8} \approx 0.79 \text{ なので約 } 3.8 \text{ 倍}$$

## 中京大学工学部電気電子工学科

学科目	物理学	出題者	白井 英俊	試験日	2015年 6月 1日 月曜日 実施
注意事項	指定用紙と通信機能のない電卓、時計のみ持ち込み許可。解答の順番は自由。不正行為者に対しては、物理学の単位をFとする。				