物理学(3)

担当: 白井　英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

3章　ベクトル解析

２章で

力は「大きさ」だけではなく、「向き(方向)」が重要と述べた。

これはまさに「力はベクトル」で表される、ということ

３章では物理において必要なベクトル解析の要点について述べる

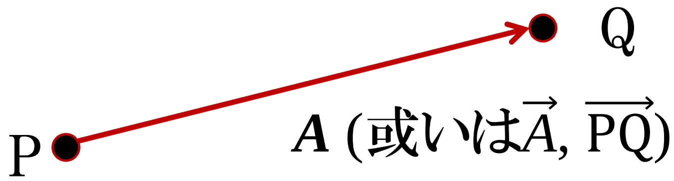
3.1 スカラーとベクトル

- ベクトル: 力のように、大きさと方向／向きをもつ量
- スカラー: 大きさだけをもつ量(「ベクトルと異なり方向を持たない」という意味で使われる)
- ベクトルで表される物理量の例:

  変位、速度、加速度、力など
- スカラーで表される物理量の例:

  長さ、速さ、時間、質量、エネルギー、仕事など
- ベクトルの表記:

  $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$、または $\boldsymbol{A}$ (或いは$\vec{A}$)



ベクトルの大きさ: $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$, $|\boldsymbol{A}|$, $|\vec{A}|$, A（細文字)

注: ちょっとわかりにくいけれど、ベクトルは太字、スカラーは普通の字で表記する

3. 2　ベクトル算法

(1) 相等 (「等しい」)

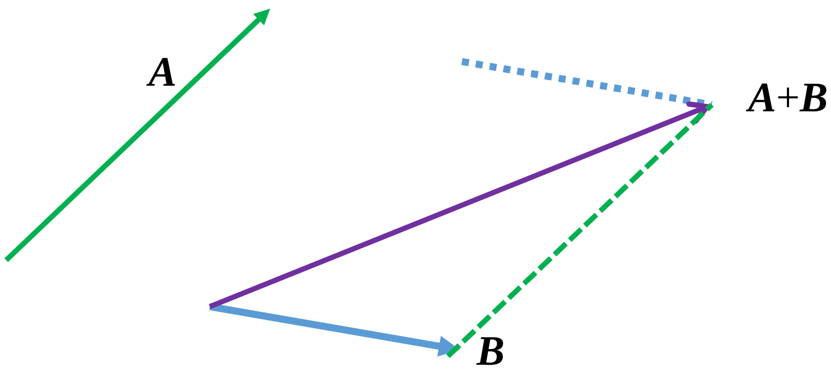
ベクトル$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　⇔　$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の大きさ、方向、向きが等しい

(2) スカラー倍

ベクトルの実数 k 倍 --- $k<0$の時は$\boldsymbol{A}$と逆向きで大きさが$|k|$ 倍

(3) 和と差(足し算と引き算)

和 --- 平行四辺形の合成則



差　$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$ として定義
ここで $-\boldsymbol{B}$は、$\boldsymbol{B}$と大きさ、方向が
等しく、向きが逆向きのベクトル

3．2　ベクトル算法(続)

(4) ベクトルの成分表示

定量的な計算のため、直交座標系を導入してベクトルを表す

$\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$

は、ベクトル$\boldsymbol{A}$を座標原点Oに平行移動したとき、終点の座標が
(A_x, A_y, A_z) となることを意味する--- ベクトルの成分表示

x成分　y成分　z成分

成分表示を用いたベクトルの計算機則:　$\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$, $\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$とすると、

1) 相等　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \Leftrightarrow A_x=B_x$, かつ $A_y=B_y$, かつ $A_z=B_z$

2) スカラー倍　$k\boldsymbol{A} = (kA_x, kA_y, kA_z)$

3) 和と差　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_x+B_x,A_y+B_y, A_z+B_z)$　$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(A_x-B_x,A_y-B_y, A_z-B_z)$

ベクトルの大きさ　$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

3．2　ベクトル算法(続)

(5) 基本単位ベクトル系

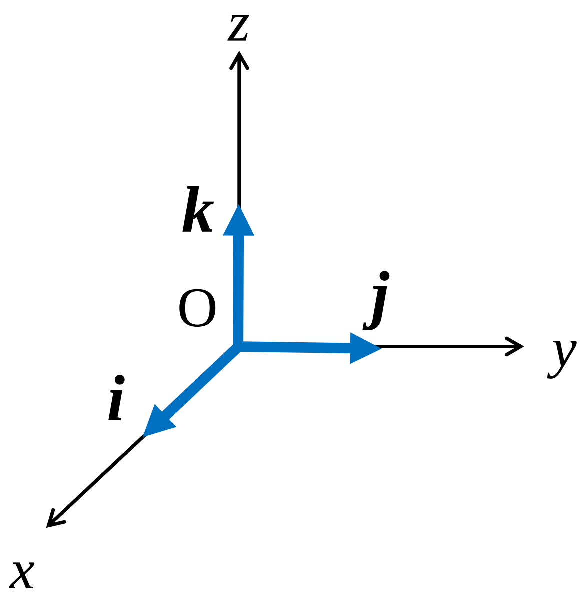
単位ベクトル: 大きさ1のベクトル

基本単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$: 直交座標系において、$+x$軸、$+y$軸、$+z$軸方向の単位ベクトル

成分表示すると: $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$

$\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$

$\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$



公式3.1　$\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$の直交座標表示

$$\boldsymbol{A}= A_x\,\boldsymbol{i}+A_y\,\boldsymbol{j}+A_z\,\boldsymbol{k}$$

(3.2.13)　$\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$と同じ方向、同じ向きの単位ベクトル$\boldsymbol{u}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{1}{\sqrt{A_x^{\,2}+A_y^{\,2}+A_z^{\,2}}}(A_x,A_y,A_z)$

練習問題　問10 (p. 36)

$\boldsymbol{A}$ = (1, -2, 3) = $\boldsymbol{i}$ - 2$\boldsymbol{j}$+3$\boldsymbol{k}$ のとき、次のものを求める

(1) 5$\boldsymbol{A}$

答: p.34より、ベクトル$\boldsymbol{A}$の成分をそれぞれ５倍すればよい

$$5\boldsymbol{A} = (5\times 1, 5\times -2, 5\times 3) = (5, -10, 15) = 5\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$$

(2) $\boldsymbol{A}$と同じ方向、向きの単位ベクトル

答: p.35 (3.2.13) より、ベクトル$\boldsymbol{A}$の大きさでそれぞれの成分を割ればよい。ベクトル$\boldsymbol{A}$の大きさ＝$\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{14}$

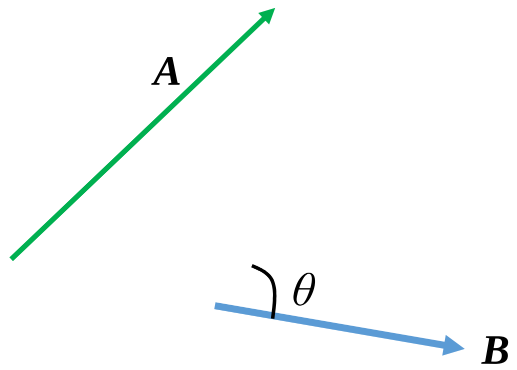
$$\boldsymbol{A}\text{の単位ベクトル}\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -2, 3) = \frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}$$

(6) スカラー積（内積）

２つのベクトル$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$のなす角をθとすると、

$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の内積　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\cos\theta$　　(3.2.14)

内積はベクトルではなくスカラー量



公式3.4 スカラー積(内積)の成分表示

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad (3.2.24)$$

公式3.2 スカラー積(内積)の演算規則

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$$
$$(k\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} = k\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

公式3.3 ２つのベクトルの直交条件

$$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} = 0$$

練習問題 問11 (p.37)

$\boldsymbol{A} = 5\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ のとき、以下を求めよ

(1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}$

答: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i} = (5\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i} = 5\boxed{\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}} - 3\boxed{\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}} + 4\boxed{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}} = 5$

(2) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$

答: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (5\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})\cdot(4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})$

$= (\boxed{5\boldsymbol{i}} \boxed{- 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}})\cdot 4\boldsymbol{i} + (\boxed{5\boldsymbol{i}} \boxed{- 3\boldsymbol{j}} + \boxed{4\boldsymbol{k}})\cdot 5\boldsymbol{j} + (\boxed{5\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}} + \boxed{4\boldsymbol{k}})\cdot(-3\boldsymbol{k})$

$= 20 + (-15) + (-12) = -7$

(3) $\cos\theta$　(θは$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$のなす角)

答: $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$の値を(3.2.14)と(3.2.24)の２つの方法で求める

(3.2.14) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\cos\theta = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2}\sqrt{4^2 + 5^2 + (-3)^2}\cos\theta$

$= \sqrt{50}\sqrt{50}\cos\theta = \boxed{50\cos\theta}$

(3.2.24) (2)の答から $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boxed{-7}$

$\therefore \cos\theta = -7/50$

(7) ベクトル積(外積)

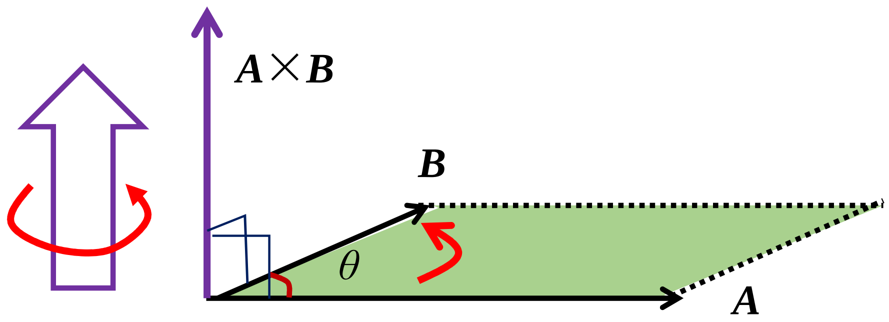
ベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の外積(もしくはベクトル積)の定義(値はベクトル):

$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$のなす角をθとすると、 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の大きさ: $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\sin\theta$

これは$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$がつくる平行四辺形の面積に等しい。$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$の方向は$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$がつくる面に垂直、向きは$\boldsymbol{A}$から$\boldsymbol{B}$の向きに(角の小さい方に)回したときの、右ネジの進む方向

公式3.7 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x)$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k} \qquad (3.2.33)$$



公式3.6 $\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$が平行$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = 0$

(7) ベクトル積（外積）

2014/04/22補足

公式3.7 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y,\quad A_zB_x - A_xB_z,\quad A_xB_y - A_yB_x)$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k} \qquad (3.2.33)$$

この式は次のようにすると覚えやすいだろう:

循環の約束: x → y → z → x → y → z → …

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ は『ベクトル』である:

行列式

そのx成分は$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$のyz成分により $\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}$ で計算

y成分は zx成分により $\begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}$ で計算

z成分は xy成分により $\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$ で計算

公式3.7 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y,\ \ A_zB_x - A_xB_z,\ \ A_xB_y - A_yB_x)$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k} \qquad (3.2.33)$$

別な見方:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k}$$

ベクトル積(続)

公式3.5 ベクトル積の演算規則

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \qquad (3.2.26)$$

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ ---これは公式3.6から導ける

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} \qquad (3.2.27)$$

$$(k\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = k\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \qquad (3.2.28)$$

基本単位のベクトル積

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0} \qquad (3.2.30)$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} \qquad \sim\ (3.2.32)$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$$

ベクトルの微分

ベクトル$\boldsymbol{A}$が時刻tの関数のとき---ベクトル$\boldsymbol{A}$の値が時刻によって変化する場合(たとえば、ベクトルによって、時々刻々位置が変化する物体の位置を表すような場合）

$\boldsymbol{A}$を$\boldsymbol{A}(t)$ で表す --- $\boldsymbol{A}$の値がtによって変化することを明示

次で定義されるベクトル量をベクトルの時間微分という

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} \qquad (3.2.34)$$

直交座標を用いて表すと

公式3.8

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}, \frac{dA_y}{dt}, \frac{dA_z}{dt}\right) = \frac{dA_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dA_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dA_z}{dt}\boldsymbol{k}$$

ベクトルの微分(続)

公式3.9 ベクトルの微分の演算規則

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \pm \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \qquad (3.2.36)$$

$$\frac{d}{dt}(k\boldsymbol{A}) = \frac{dk}{dt}\boldsymbol{A} + k\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \qquad (3.2.37)$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \qquad (3.2.38)$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \qquad (3.2.39)$$

練習問題　問13 (p.40)

外積の時間微分の次の式が成り立つことの確認:

(3.2.39)　$$\frac{d(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

[解] (3.2.33)から $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\boldsymbol{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\boldsymbol{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\boldsymbol{k}$

両辺をtで微分する：

x成分: $$\frac{d(A_y B_z - A_z B_y)}{dt} = \frac{dA_y}{dt}B_z + A_y\frac{dB_z}{dt} - \left(\frac{dA_z}{dt}B_y + A_z\frac{dB_y}{dt}\right)$$

$$= \left(\frac{dA_y}{dt}B_z - \frac{dA_z}{dt}B_y\right) + \left(A_y\frac{dB_z}{dt} - A_z\frac{dB_y}{dt}\right)$$

y成分: $$\frac{d(A_z B_x - A_x B_z)}{dt} = \left(\frac{dA_z}{dt}B_x - \frac{dA_x}{dt}B_z\right) + \left(A_z\frac{dB_x}{dt} - A_x\frac{dB_z}{dt}\right)$$

z成分: $$\frac{d(A_x B_y - A_y B_x)}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt}B_y - \frac{dA_y}{dt}B_x\right) + \left(A_x\frac{dB_y}{dt} - A_y\frac{dB_x}{dt}\right)$$

これはそれぞれ$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$ のx成分、y成分、z成分の値と一致する。　(QED)

三重積

スカラー三重積の性質

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \qquad (3.2.40)$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} \qquad (3.2.41)$$

ベクトル三重積の性質

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} \qquad (3.2.42)$$

$$\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{A} \qquad (3.2.43)$$

$$\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B} \qquad (3.2.44)$$

ヤコビの恒等式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{0} \qquad (3.2.45)$$