物理学(4)

担当: 白井　英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

4章　力のモーメントとモーメントのつり合い

物体に力を加えた時、作用点の位置によるが、

並進運動 --- 物体全体としての移動

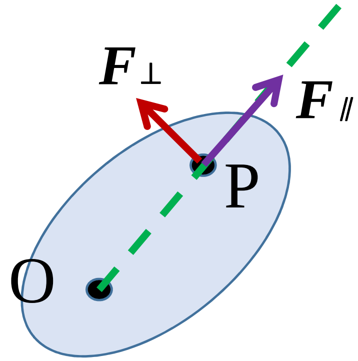
回転運動 --- 物体自体の回転

をおこす

回転運動をおこす能力のことを力のモーメントという

4章では力のモーメントについて学ぶ

4.1 力のモーメント



剛体(rigid body): 力が加わっても形が変形しないもの

剛体の物体が1点 O で固定され、そのまわりで自由に回転できるようになっている

ある点 Pに $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$方向の力$\boldsymbol{F}_{/\!/}$[N]を加える

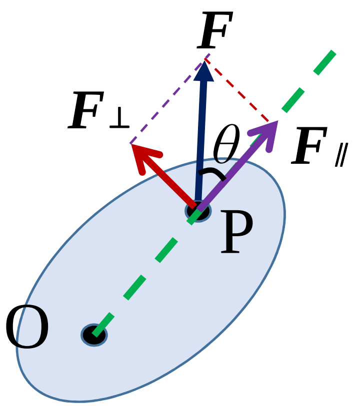
Oが固定されているので運動しない

点 Pに $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と垂直方向の力$\boldsymbol{F}_{\perp}$[N]を加える

O点を中心に、反時計回りに回りだす

このことから、点Pに$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$に対して角θをなす方向に力を加えると…

4.1 力のモーメント(続)



このことから、点Pに$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$に対して角$\theta$をなす方向に力$\boldsymbol{F}$ [N]を加えると…

$\boldsymbol{F}$の$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$方向の分力$\boldsymbol{F}_{/\!/}$ --- 大きさ$F\cos\theta$ [N]

は、物体の運動に関係しない

$\boldsymbol{F}$の$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と垂直な分力$\boldsymbol{F}_{\perp}$ --- 大きさ$F\sin\theta$ [N]

は、物体を回転させる

この物体を回転させる力は、力$\boldsymbol{F}$の作用点Pが、回転の中心Oから遠ければ遠いほど大きい

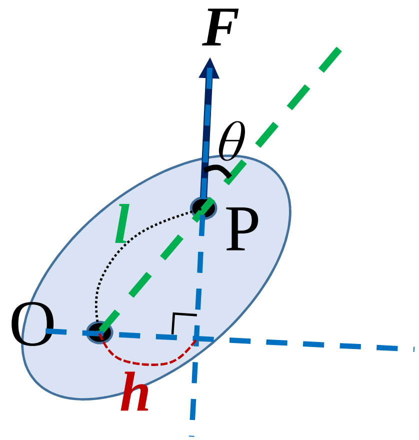
そこで、点Oのまわりの力$\boldsymbol{F}$の力のモーメント$\boldsymbol{M}$を次で定義:

$\boldsymbol{M} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} \times \boldsymbol{F}$　　大きさは = $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\, F\sin\theta$ (単位は N・m)

点Oのまわりの力$\boldsymbol{F}$の力のモーメント

点Oのまわりの力$\boldsymbol{F}$の力のモーメントMの大きさ:

$|\boldsymbol{M}| = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\, F \sin\theta$　　(単位は N・m)　(4.1.1)



$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = l$ [m]とすれば、

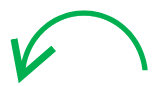
作用点ではなく、作用線、であることに注意！

$|\boldsymbol{M}| = l\, F \sin\theta$　[N・ m]　(4.1.1)

また、点Oから力の作用線までの距離を h [m]とすると、

$|\boldsymbol{M}| = h\, F$　[N・ m]　(4.1.2)　　hは「うでの長さ」

回転には向きがある

正の符号：反時計回りに回そうとする作用 

負の符号：時計回りに回そうとする作用 

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と$\boldsymbol{F}$の外積の正負に対応

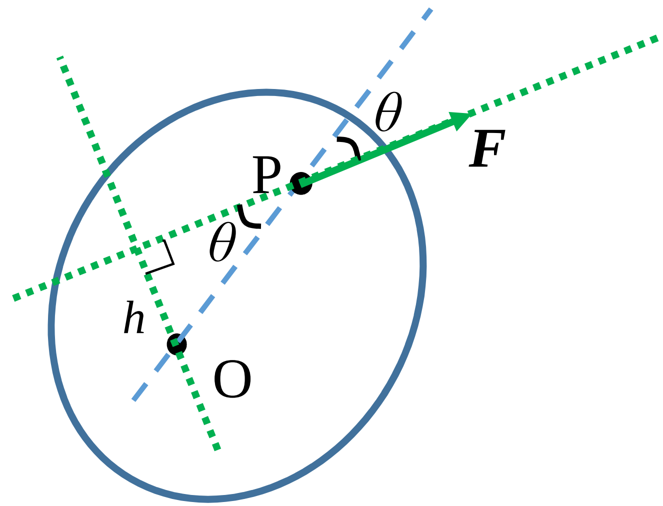
練習問題　問14 (p.44)

図のようにP点に作用する力$\boldsymbol{F}$の、点Oのまわりの力のモーメントを求めよ。ただし、$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 2$ m,　$|\boldsymbol{F}| = 10$ N,　$\theta = 30^{\circ}$

解:　(4.1.1) $|\boldsymbol{M}| = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\, F \sin\theta$

に数値を代入して　$M = 2 \times 10 \times \frac{1}{2} = 10$ Nm

回転方向が時計回りなので、-10 Nm



別解:

(4.1.2) $|\boldsymbol{M}| = hF$

右図から $h = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \sin\theta$ より、$h = 1$ m

として求めても良い

偶力

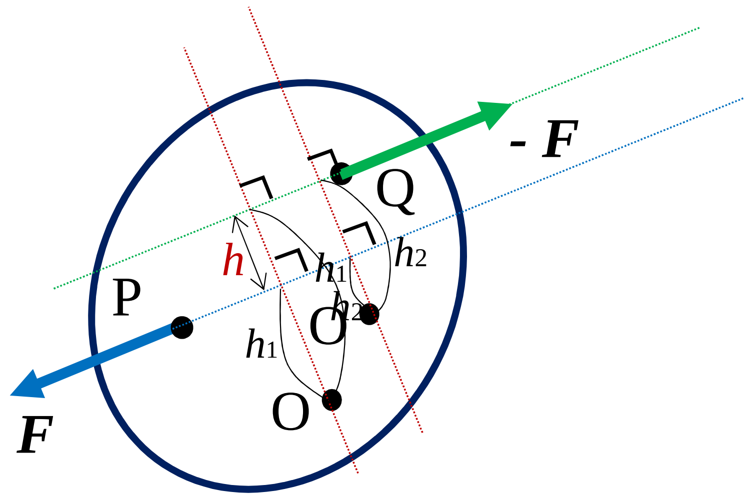
偶力(couple of forces):作用線が平行で、互いに大きさが等しく、逆向きの2つの力

--- 物体が固定されている点がなくても、物体を回転させる

右図のように、剛体の物体に偶力がはたらいているとする(***F***が点Pを、***-F***が点Qを作用点としてはたらく)

「どこに点Oをとっても」点Oのまわりの偶力のモーメントの大きさは: (h_1, h_2はOに依存するが、hの値はOの位置に依存しない)

$$|\boldsymbol{M}| = h_1 F + h_2 (-F) = (h_1 - h_2)F = h F$$



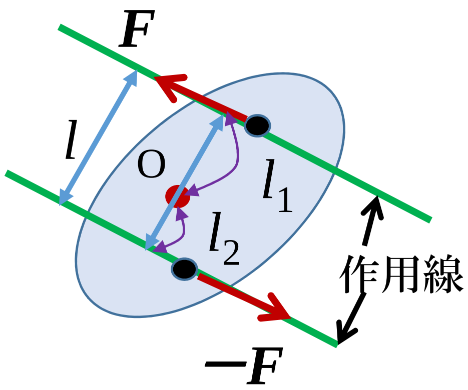
問題

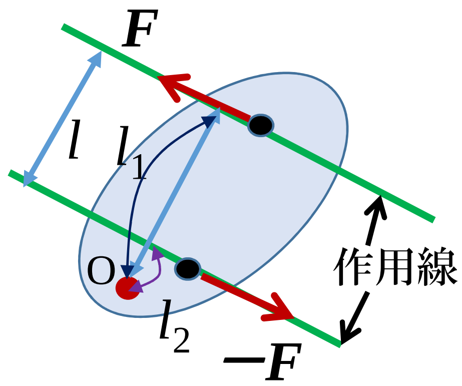
　　任意の点の周りにおける偶力のモーメントの大きさは選ぶ点によらず次式で与えられることを示せ:

偶力のモーメントの大きさ

＝力の大きさ×2つの力の作用線間の垂直距離

作用線の間にある点の周りの偶力



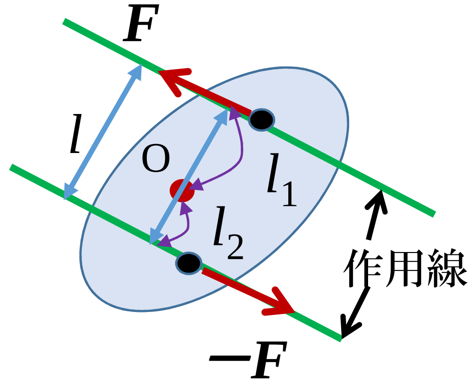


作用線の外にある点の周りの偶力

問題　任意の点の周りにおける偶力のモーメントの大きさは選ぶ点によらず次式で与えられることを示せ:

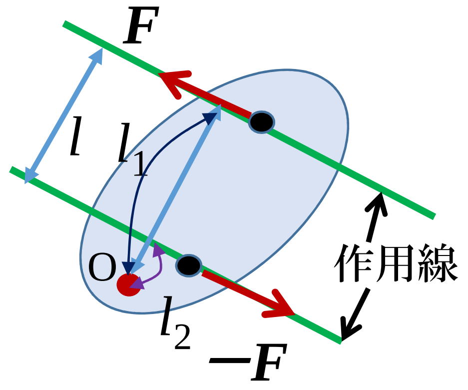
偶力のモーメントの大きさ＝力の大きさ×2つの力の作用線間の垂直距離

[解] 右上図のように、考えている点をOとし作用線の間にとる。そして２つの力の作用線間の距離をl、Oと作用線間の距離をそれぞれl_1、l_2とおいて考える。



力のモーメントの向きは２つとも反時計回りなので、偶力のモーメントの大きさ=Fl_1 + Fl_2 これは、$l=l_1+l_2$よりFl に等しい

右下図のように、Oを作用線の外側にとると、一方は正の向き、もう一方は負の向きの力のモーメントとなる。



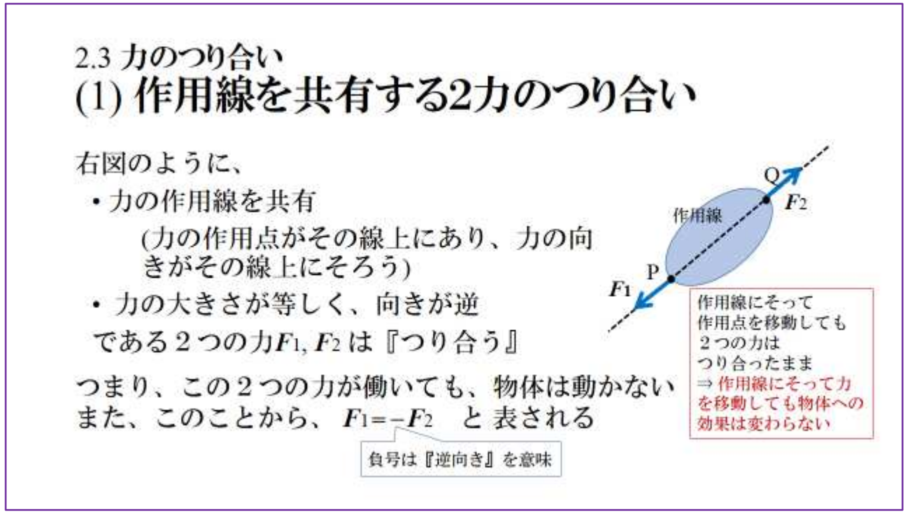
偶力のモーメントの大きさ=Fl_1 - Fl_2となり、これは、$l=l_1- l_2$より、やはりFl に等しい

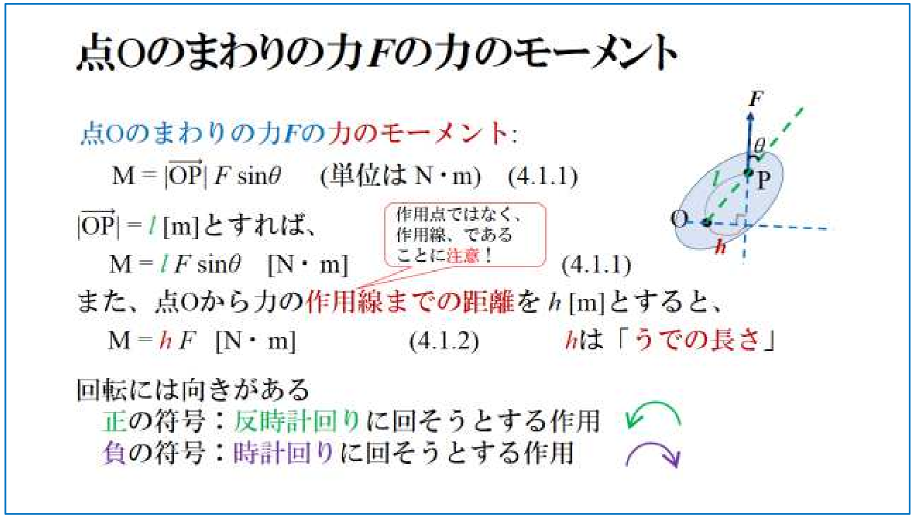
4.2 力のモーメントのつり合い: 剛体の平衡

力の作用点の移動

2.3節で、2つの力がつり合っている場合、力の作用点をその作用線に沿って移動しても剛体への効果は変わらない、と述べた

⇔ 作用線を共有する大きさ、向きの等しい2つの力は等価





4.1節からの知見:

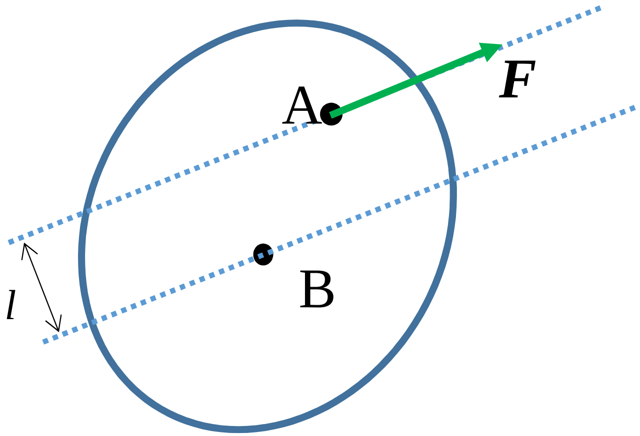
点Oのまわりの力***F***のモーメント の大きさ= ***F*の大きさ×力*F*の作用線までの距離**

これからも、

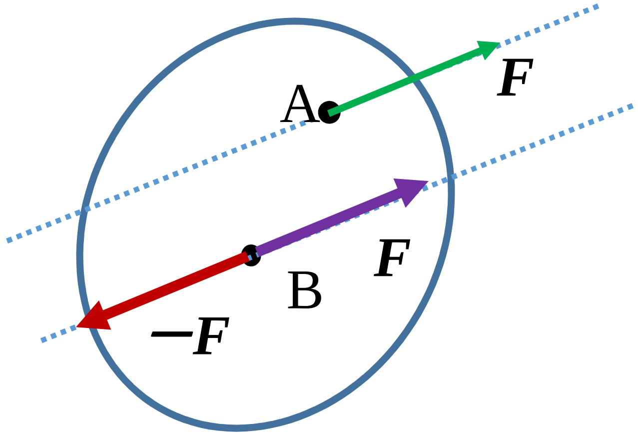
作用線上に沿って力を移動しても物体に対する効果は変わらない

力*F*の作用点の移動

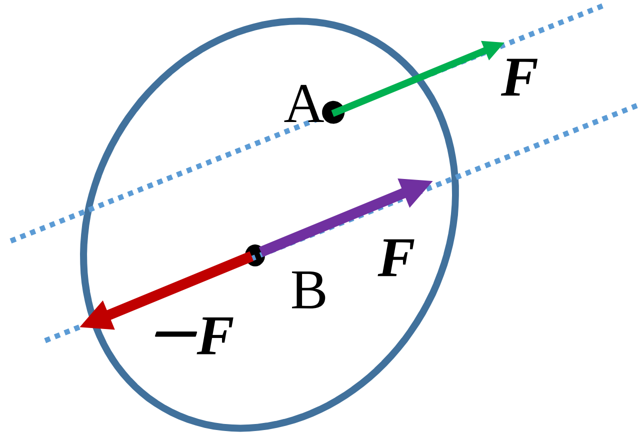
力*F*の作用点Aを「作用線上ではなく」勝手な点Bに移動した場合の影響



A点とB点の間の、力*F*に垂直な方向の距離を *l* とする



B点に、力*F*と等しい力*F*と、逆向きの力−*F*を加えてみる---これらは互いに打ち消すので物体の運動に影響なし

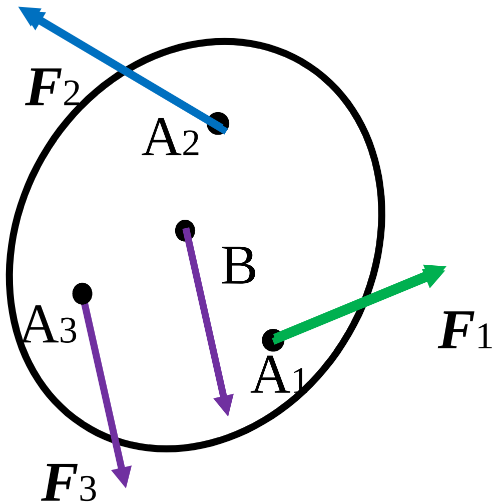


A点の力*F*と、B点の力−*F*を消す---これらは偶力なので、この偶力によるカのモーメントの分の影響があることがわかる

剛体の平衡

物体の点A_1, A_2, … A_nに力$\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, … $\boldsymbol{F}_n$がはたらいているとき、物体が静止するための条件

それぞれの力を、任意の一点Bに移動して考えると



(1) 力のつり合いの条件

B点にはたらく力の合力が**0**

つまり、$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+..+\boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{0}$

ただし、これだけでは、この物体の重心が動かない、
ということだけしか言えない
実際には、右図は反時計回りに回転してしまう---偶力の場合も同じことがいえる
そこでもうひとつの条件が必要:

(2) 力のモーメントのつり合いの条件

任意の点の回りの力のモーメントの総和＝0

大きさのある物体(剛体)の静止条件

公式4.1 (大きさのある) 物体の平衡(静止)条件:

(1) 並進条件: 力のつり合い条件

物体にはたらくすべての力の和がゼロ(つりあう)

$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+..+\boldsymbol{F}_n = \mathbf{0}$

--- 2章で検討してきたもの

どのような点をとってもよい、ということ

(2) 回転条件: 力のモーメントのつり合い条件

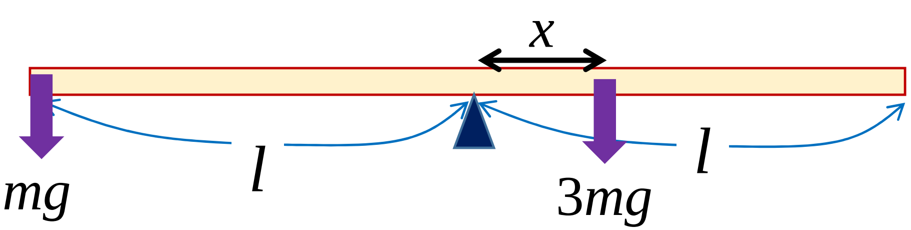
任意の点について力のモーメントの和がゼロ(つりあう)

--- 力のモーメントの和がゼロでなければ回転運動する

問題を考えることで理解を確実にする

例題. シーソー

遊園地のシーソーで小さな子供と大きな子供が遊んでいる。小さな子供がシーソーの端に座った時、体重が小さな子供の3倍の大きな子供は、シーソーの支点からどの位置に座ればシーソーはつりあうか。



[解] シーソーの長さを2*l*[m](支点から端まで*l* [m])、小さな子供の質量を*m* [kg]、大きな子供の座る位置と支点との距離を*x* [m]、重力加速度の大きさをg [m/s^2]とする

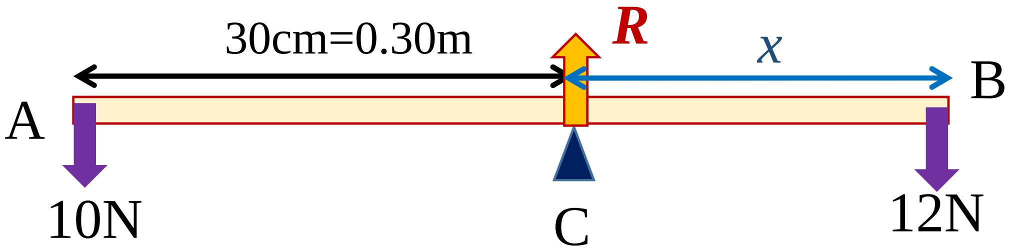
支点の周りの力のモーメントの大きさ: $l \times mg - x \times 3mg = 0$

ゆえに　$x = l / 3$ [m]

ちなみに、支点には上向きに4mg [N]の力がはたらく

例題4.1

軽い棒ABが点Aに10N、点Bで12Nの鉛直下向きの力を受けて静止している。支点Cから受ける力とBCの長さを求めよ。ただし、AC=30cmとする。



[解] この棒は静止しているのだから、2つの条件を満たしている。

点Cから受ける力を***R***[N]とすると、まず(1)力のつり合い条件から、

R=10+12　　⇒ 上向きに22N

次に(2)力のモーメントのつり合い条件から、BCの長さを *x*[m]として、C点の周りの力のモーメントの和を考えると:

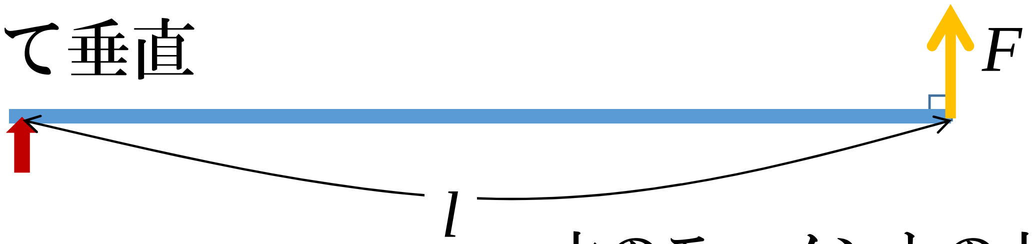
$$10 \times 0.30 = 12 \times x \quad \Rightarrow \quad x = 0.25\ \mathrm{m}$$

参考: (2)の条件は、A点でもB点でも計算してよい ⇒ 計算が楽になるような点を選ぶこと

力のモーメントの計算3パタン

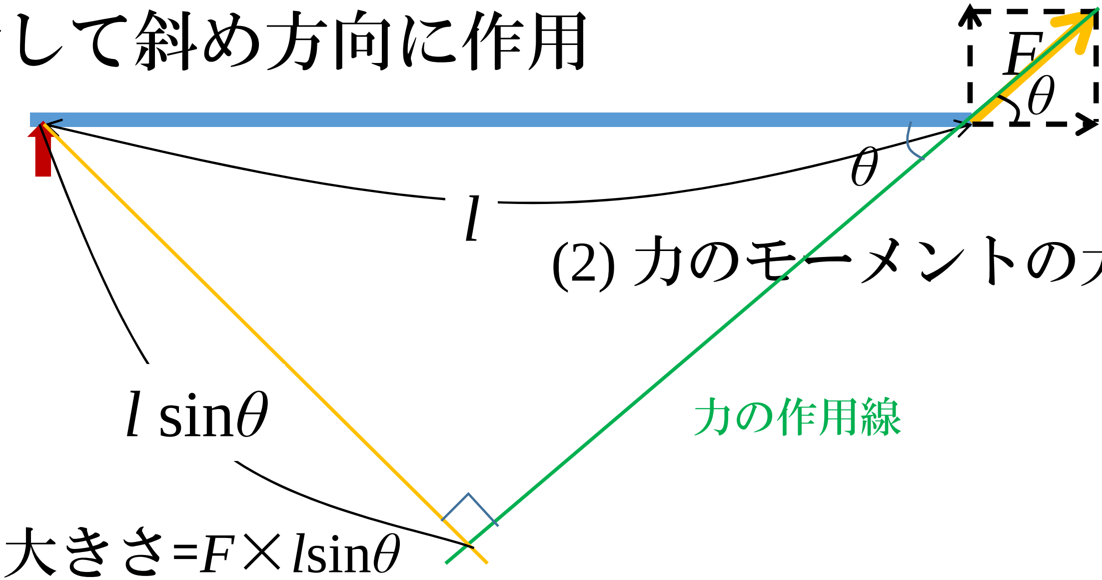
垂直な力の成分×距離

(1) 力が軸に対して垂直



力のモーメントの大きさ=$F\times l$

(2-3) 力が軸に対して斜め方向に作用



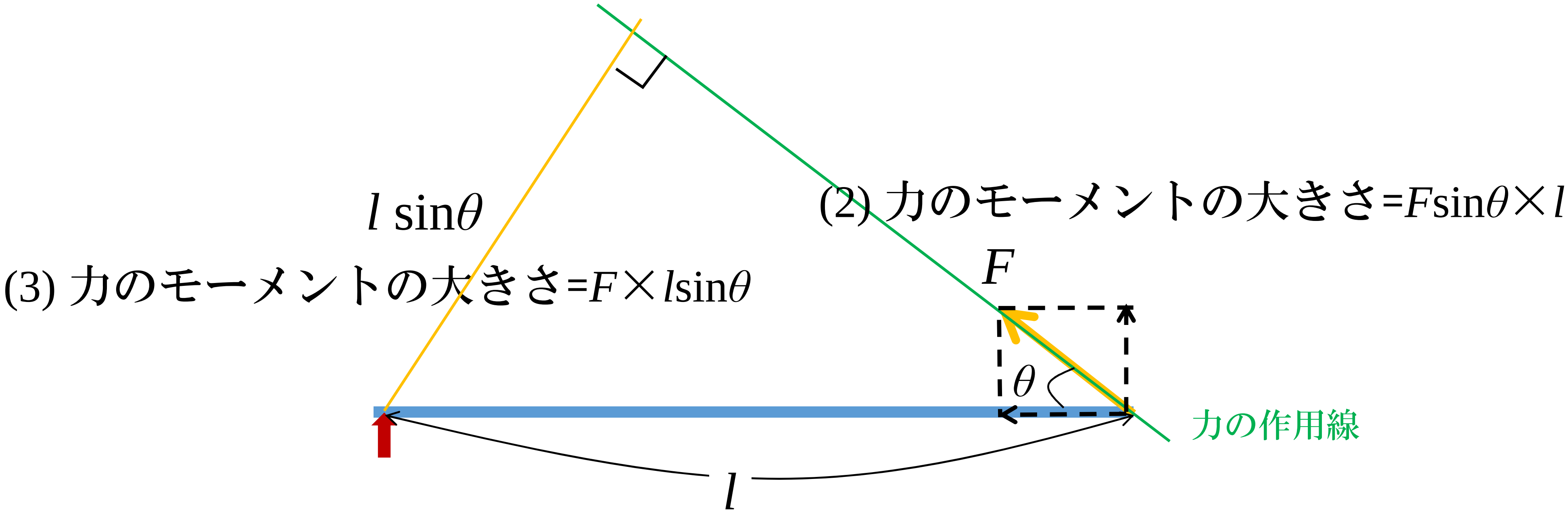
(2) 力のモーメントの大きさ=$F\sin\theta\times l$

(3) 力のモーメントの大きさ=$F\times l\sin\theta$

力のモーメントの計算 (おまけ)

垂直な力の成分×距離

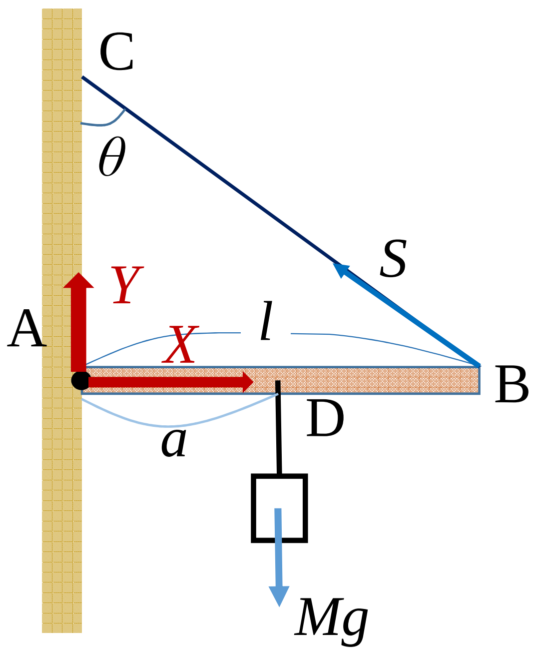
(2’-3’) 力が軸に対して斜め方向に作用



(1) 「力が軸に対して垂直 」は$\theta=\pi/2$ のケース --- $\sin(\pi/2)=1$

例題4.2

右図のように、重さが無視できる長さlの棒が、一端はピンAで壁に取り付けられ、他端は糸BCで壁に結ばれて、水平になっている。糸と壁がなす角はθである。いま、棒上の点D(AD=a)に質量Mのオモリを吊るした時、糸BCの張力とピンAの抗力とを求めよ。



[解] この棒にかかる力をすべて書き込む。

糸の張力をSとする。棒の重さは無視できるが、おもりによる重力 Mgが点Dにかかる。また、点Aの抗力を2つに分けて考えることにする --- 棒に平行な力をX、棒に垂直な力をYとする。

この棒は静止しているのだから、2つの条件を満たしている。
まず(1)力のつり合い条件から、

水平方向のつり合い: $X=S\sin\theta$

垂直方向のつり合い: $Y+S\cos\theta = Mg$

次に(2)力のモーメントのつり合い条件から、点Aの回りの力のモーメント:

$$S\cos\theta \times l - Mg \times a = 0$$

これにより、$S=\dfrac{aMg}{l\cos\theta}$

よって、 $X=\dfrac{a}{l}Mg\tan\theta$　　$Y=(1-\dfrac{a}{l})\,Mg$

重心(center of gravity)

どのような物体でも、部分から構成されている

n個の部分からなる物体に対し、一つ一つの部分に対する重力を考えるのは大変 ⇒ 重心というある一点に重力が作用しているとみなすと、考えやすい

例: １個あたりm [kg]の部分がn個集まってできた物体の場合、

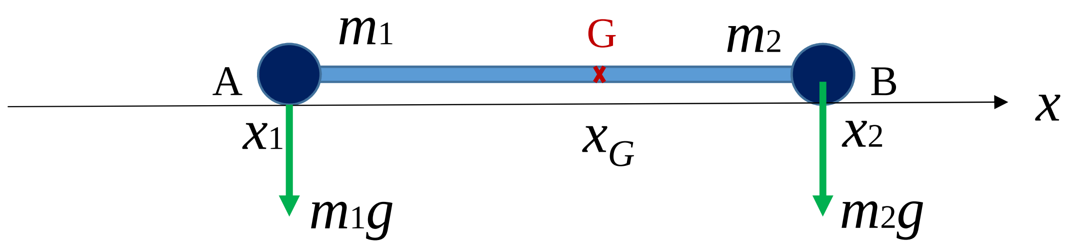
重心に全質量が集まっている($n \times m$ [kg]の質量)と考える、つまり、nmg [N] の力が重心に作用しているとみなす

「(密度が)一様な棒」とか、「 (密度が)一様な円盤」というのは、どの部分も同じ重さのもので構成されていることを意味

注意: 重心は単に「真ん中」を意味するものではない---例題で検討する

例題4.3

質量m_1とm_2の2つの小物体が軽い棒ABの両端につけられて水平に置かれている。全体の重心を求めよ。



[解] 棒に沿ってx軸を取り、A点、B点の位置をそれぞれx_1, x_2とする。
また求める重心Gの位置をx_Gとする。

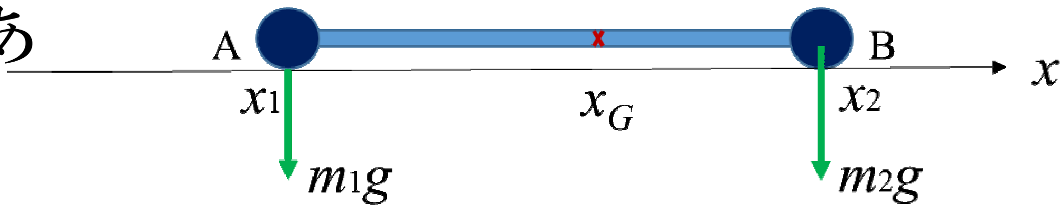
全質量が重心に集まっているとみなせる、という重心Gの定義から、Gのまわりの力のモーメントの和が０でなければならない

$$m_1g\times(x_G - x_1) - m_2g\times(x_2 - x_G) = 0$$

ゆえに、 $x_G = \dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$

例題4.3 に関連しての補足

例題4.3 では、両端点におもりがある1次元(直線)上の重心を求めた:



$$x_G = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

これは、線分ABを $m_2:m_1$ に内分する点である

このことを使うと、棒が2次元(平面)にあっても、3次元(空間)にあっても、重心の位置を求めることができる。

例えば、棒の端点Aの座標が (x_1, y_1)、Bの座標が(x_2, y_2)とすると、線分ABを $m_2:m_1$ に内分する点は、(x_G, y_G) に等しく、以下となる:

$$x_G = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} \qquad y_G = \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}$$

3個以上の小物体の重心

３個の小物体からなる系(システムともいう)の重心の求め方:

任意の2つの小物体(m_1, m_2とする)の重心G_{12}を求める。

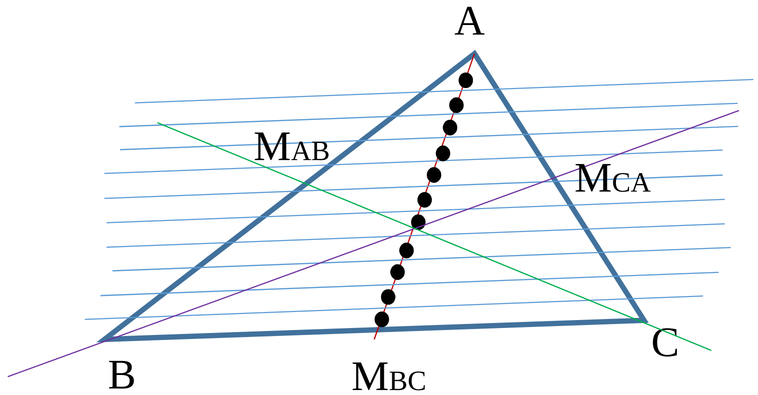
次に、その位置G_{12}にm_1とm_2の全質量が集まっているとして、残りの小物体(m_3とする)との重心G_{123}を求める

４個以上の場合も、この繰り返し

例題 4.4

密度の一様な薄い三角形の板ABCの重心を求める

[解] 右図のように、板を辺BCに平行に細かく棒状に分割すると、それぞれの棒状の小物体の重心は、それぞれの中点にある。



これらは、辺BCの中点M_{BC}とAとを結ぶ直線上にあることがわかる

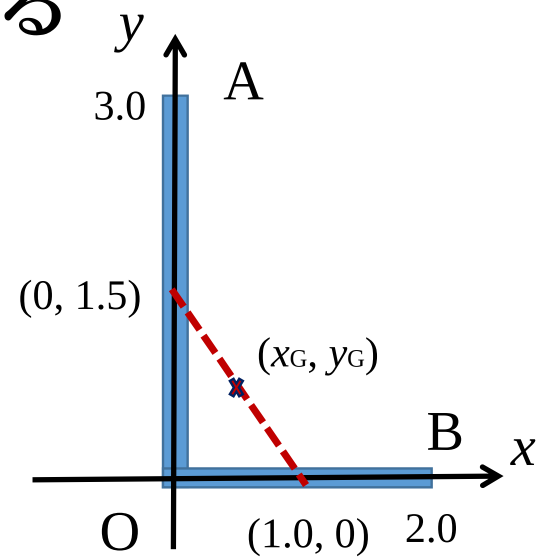
ゆえに、これらすべての重心は、やはり辺BCの中点M_{BC}とAとを結ぶ直線上にあるはず

同様に、今度は辺ACに平行に細かく棒状に分割すると、それぞれの棒状の小物体の重心は、今度は辺CAの中点M_{CA}とBとを結ぶ直線上にならぶ。ゆえに、これらすべての重心は、やはり辺CAの中点M_{CA}とBとを結ぶ直線上にあるはず

以上から、A, B,Cとそれに向かう辺の中点をそれぞれ結んだ直線の交点が三角形ABCの重心となる --- これは数学で学んだ三角形の重心に一致

例題4.5

質量5.0 kg、長さ 3.0 mの細い棒と、質量 4.0 kg、長さ 2.0 m の細い棒とで作ったL字形の重心(x_G, y_G)を求める



[解] 右図のように、端にA, B, Oと記号を割り振る
そして、OBをx軸、OAをy軸として位置を定める。

棒AOの重心を求める: (0.0, 3.0/2) = (0.0, 1.5)

棒BOの重心を求める: (2.0/2, 0.0) = (1.0, 0.0)

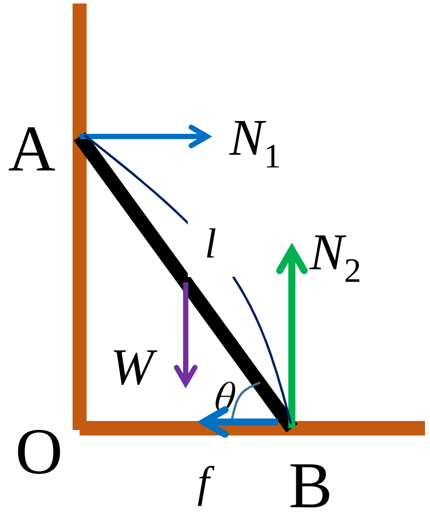
仮想的にこの２点を結ぶ直線を考えると、この重心は、例題4.3で求めたように、この直線を 4.0:5.0 の比で内分した点となる

ゆえに、(x_G,y_G) = ((0.0*5.0+1.0*4.0)/(4.0+5.0), ((1.5*5.0+0.0*4.0)/(4.0+5.0))

= (4.0/9.0, 7.5/9.0) = (0.44, 0.83)

例題4.6

なめらかな鉛直の壁に、水平で粗い床から長さlのはしごを立てかける。はしごを次第に傾けていくと、床となす角が60°になると倒れた。はしごと床の間の静止摩擦係数μを求めよ。ただし、はしごの重さはWで、重心ははしごの中心にあるとする。



[解] 右図のように、端にA, B, Oと記号を割り振る。

はしごが倒れる寸前の状態で考える

はしごにはたらく力をすべて書き込む---

壁からの垂直抗力をN_1、床からの垂直抗力をN_2, 床からの静止摩擦力をf、はしごの重力をWとする。

棒が静止するための条件を考える:

(1) 力のつり合い: 水平方向: $N_1 = f$

垂直方向: $N_2 = W$

(2) 力のモーメントのつり合い: B点まわりの

$$W \times (l/2)\cos\theta = N_1 \times l\sin\theta$$

これを解くと、$f = N_1 = \dfrac{W}{2\tan\theta}$

ここで倒れる寸前のfは最大静止摩擦力なので、$f = \mu N_2 = \mu W$より

$$\mu = \frac{f}{W} = \frac{1}{2\tan\theta}$$

$\theta = 60^\circ$より、$\mu = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

2014/04/21補足

物体が静止しているための条件

(0) その物体に働く力をすべて図に書き込んで考える

(1) 力のつり合い

床においてあるのなら、床に平行にx軸、鉛直上方向にy軸をとる
斜面にあるのなら、斜面に平行にx軸、x軸に垂直な方向にy軸をとる
吊り下げられているのなら、鉛直下向きにx軸をとる

(a) x軸方向の力の和 = 0

(b) y軸方向の力の和 = 0

注: 正の力の大きさ=負の力の大きさ, という式でも良い

(2) 力のモーメントの和　--- 力のモーメント=力×ウデの長さ

適当な回転軸を想定(例:「P点周り」の力のモーメント)

反時計回りの力のモーメントが正、時計回りは負