物理学(5)

担当: 白井　英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

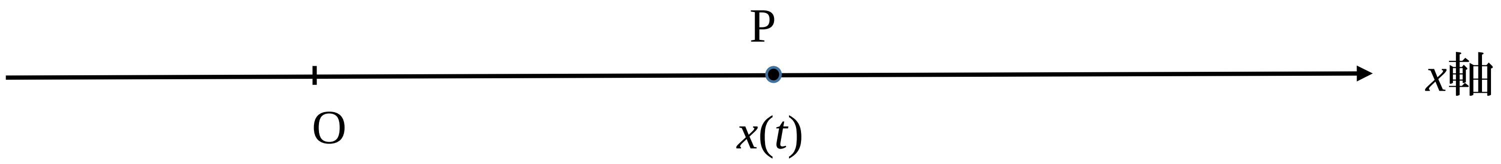
5章　運動の表し方

質量はあるが大きさを無視できる(仮想的な)物体:「質点」

直線上、平面内、空間内を運動する質点の運動の状態をどのように表すかについて学ぶ

運動状態を表す物理量(ここで扱うもの): 位置、速度、加速度

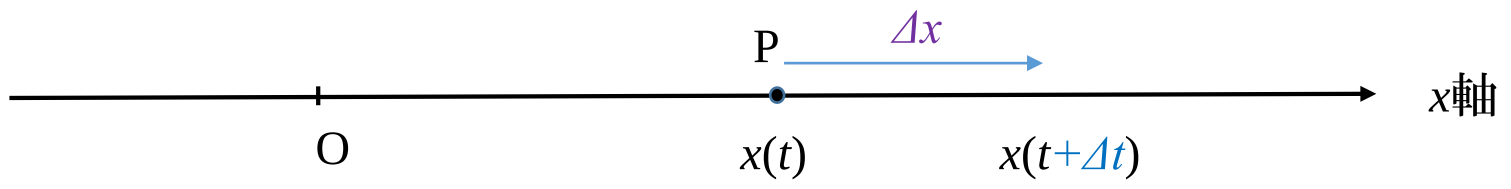
5.1 直線運動の場合での位置、速度、加速度



質点が1つの直線上を運動=直線運動する場合、どこか一点Oを基点(原点)と定め、直線に沿った座標軸(x軸)を用いて、質点の運動状態を表す　位置、速度、加速度　を時刻tの関数として表す

位置: 質点の座標で表す $x(t)$ --- 単位は m

速度



直線上を動く物体---物体の位置は時刻tの関数として$x(t)$で表せる

- 時刻 t のときの位置　　$x(t)$
- 時刻$(t+\Delta t)$のときの位置　　$x(t+\Delta t)$

デルタ

この間の時間の差：$(t+\Delta t)-t=\Delta t$

この間の位置の差(変位)：$x(t+\Delta t)-x(t)$

これを Δx で表すことにする　$\Delta x = x(t+\Delta t)-x(t)$

注：Δは「差」（英語で difference)を表すのに使われる。そしてΔはアルファベットのDに当たるギリシャ文字(小文字はδ)

速度 $v(t)$: 時刻tにおいて、$\Delta t \to 0$の極限での変位の割合$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

(5.1.1)　$v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{dx}{dt}$　　[m/s]

位置 x(t) の t による導関数

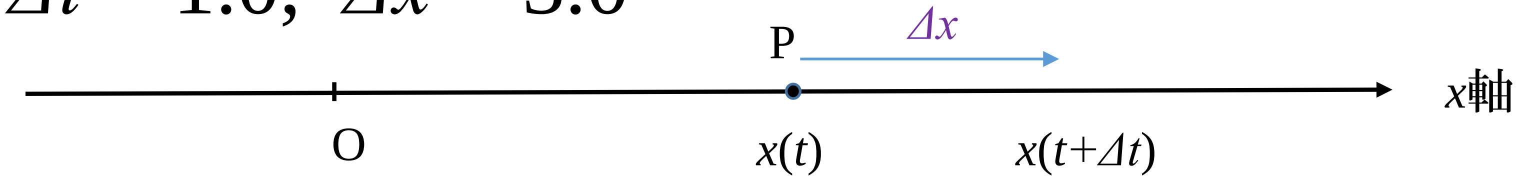
速度はベクトル(方向をもつ)
その絶対値(スカラー量)を速さという

速度と速さの違い

速度はベクトル(方向をもつ)
その絶対値(スカラー量)が速さ

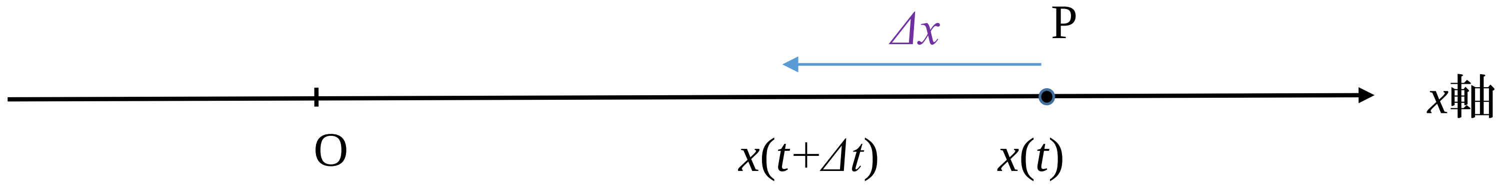
速さ＝速度= 3.0 m/s

例１．$\Delta t = 1.0,\ \Delta x = 3.0$



速さ＝3.0 m/s　速度= －3.0 m/s

例２．$\Delta t = 1.0,\ \Delta x = -3.0$



加速度

- 時刻 t のときの速度　　　$v(t)$
- 時刻$(t+\varDelta t)$のときの速度　　$v(t+\varDelta t)$
- 速度の変化　　　$\Delta v = v(t+\varDelta t) - v(t)$

加速度 $a(t)$: 時刻tにおいて$\Delta t \to 0$の極限での速度変化の割合、$\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad [\mathrm{m/s^2}] \tag{5.1.2}$$

参考: $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$ なので、 $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)$

つまり位置$x(t)$の時刻 t による2階微分

例題5.1 速度と加速度の計算

x軸上を運動する点の、時刻tでの位置$x(t)$が以下で与えられるとき、時刻tにおける速度$v(t)$を加速度$a(t)$を求めよ。

(1) $x(t) = 3t$

答: 速度は(5.1.1)、加速度は(5.1.2)式で与えられる。つまり、速度はtの一階微分、加速度はtの二階微分。微分の計算を知っていれば簡単

そこで、$v(t)= \dfrac{dx}{dt} = 3$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

(2) $x(t)=2t^2+t+1$

答: $v(t)= \dfrac{dx}{dt} = 4t+1$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 4$$

問17　速度と加速度の計算

x軸上を運動する点の、時刻tでの位置$x(t)$が

$$x(t)=t^3+t$$

で与えられるとき、時刻tにおける速度$v(t)$を加速度$a(t)$を求めよ。

答: 例題5.1と同様、速度は(5.1.1)、加速度は(5.1.2)式で与えられる。つまり、速度はtの一階微分、加速度はtの二階微分。微分の計算を知っていれば簡単

そこで、$v(t)=\frac{dx}{dt}=3t^2+1$

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=6t$$

5.1.1 典型的な運動例1: 等加速度直線運動

等加速度直線運動: 等しい加速度で、直線上を動く運動

例: $x=x_0$の点を速度v_0で時刻$t=0$に出発し、一定加速度aでx軸上を運動する質点

t秒後の質点の位置をx, 速度をvとすると、等加速度の運動なので、

$$\frac{v-v_0}{t}=a \qquad (5.1.3)$$

vはtの一次式

したがって、t秒後の質点の速度$v=v_0+at$ (5.1.4)

$t=0$からt秒後の質点の変位(移動距離)

$$x-x_0=\frac{v+v_0}{2}t=\frac{(v_0+at)+v_0}{2}t=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \qquad (5.1.5)$$

ゆえに、$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$ (5.1.6)

xはtの二次式

また、これから $v^2-v_0{}^2=2a(x-x_0)$ (5.1.7)

公式5.1 加速度aの等加速度直線運動

t 秒後の速度:

$$v = v_0 + at$$

t 秒後の位置:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

速度二乗変化と移動距離:

$$v^2 - {v_0}^2 = 2a(x - x_0)$$

例題5.2　等加速度直線運動

x軸上を運動する質点。出発点から10.0 m/sの速さで右向き(x軸の正の向き)に、等加速度運動をして、2.0 秒後に左向きに9.6 m/s の速さになった。この物体の運動の加速度の大きさと向きを求めよ。また、出発点から右に最も離れる点の位置を求めよ。

[解] 出発点をx軸の原点にとる。

5.1.1節の解説にあわせると、加速度をa [m/s^2]として、

$x_0 = 0$　　　　$v_0 = 10.0$

t=2 における速度 $v = -9.6$　$= v_0 + at = 10.0 + 2a$

これから、 $a = -9.8$ --- 大きさは9.8 m/s^2、左向き

t秒後の位置: $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0 + 10.0 * t + 0.5 * (-9.8) * t^2 = -4.9 t^2 + 10.0 t$

この最大値: $t = 10.0 / 9.8$ のときで、5.1 m

問18 等加速度運動

時速100 kmの自動車がブレーキをかけて、等加速度直線運動により100 m走って止まるときの、加速度の大きさを求める。

[解] 出発点をx軸の原点にとる。

5.1.1節の解説にあわせると、加速度をa [m/s^2]、ブレーキをかけてから停止するまでの時間をt [s]として、

$x_0 = 0$　　$v_0 = 100\text{ km/h} = 100\times10^3/(60\times60)\text{ m/s} = \frac{1.00}{36}\times10^3\text{ m/s}$

t 秒後の速さを v、位置をxとすると$v = 0$,　　$x - x_0 = 100\text{ m}$

(5.1.7)式、$v^2 - {v_0}^2 = 2a(x - x_0)$

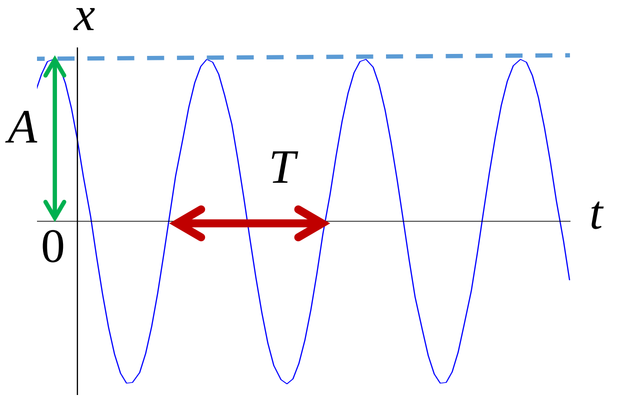
により、$0 - (\frac{1.00}{36}\times10^3)^2 = 2a\times100$

$\therefore\ a = (\frac{1.00}{36}\times10^3)^2 / 200 = 3.858\ldots$　　答　3.86 m/s^2

5.1.2 典型的な運動例2: 単振動

単振動 (調和振動): x軸上を運動する質点の位置xが時刻 t の関数として以下のように表される(ここで、A, ω, αは定数):

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad (5.1.8)$$



この運動は周期的に繰り返す運動を表す

ここで、

A: 単振動の**振幅**、ω: **角振動数**、

$(\omega t + \alpha)$:**位相**、 α: **初期位相**(t=0のときの位相)

周期T: 1回振動するのに要する時間 $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} \qquad (5.1.9)$

振動数 n: 1秒間あたりの振動回数 $\quad n = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi} \qquad (5.1.10)$

単振動の微分方程式

$x(t) = \boxed{A\cos(\omega t + \alpha)}$ (5.1.8)

から、この速度$v(t)$と加速度$a(t)$を求める---それぞれ一階の時間微分と二階の時間微分

$v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \alpha)$ (5.1.11)

$a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -\omega^2 \boxed{A\cos(\omega t + \alpha)}$ (5.1.12)

したがって、 $a(t) = -\omega^2 x(t)$ (5.1.13)

ここで、$a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ より、 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$ (5.1.14)

この式を、単振動の微分方程式という

5.2 空間内の運動：位置

平面内や空間内を運動する質点の運動の記述

位置の記述:

平面上の運動---平面直交座標系O-xyを用いた座標(x, y)

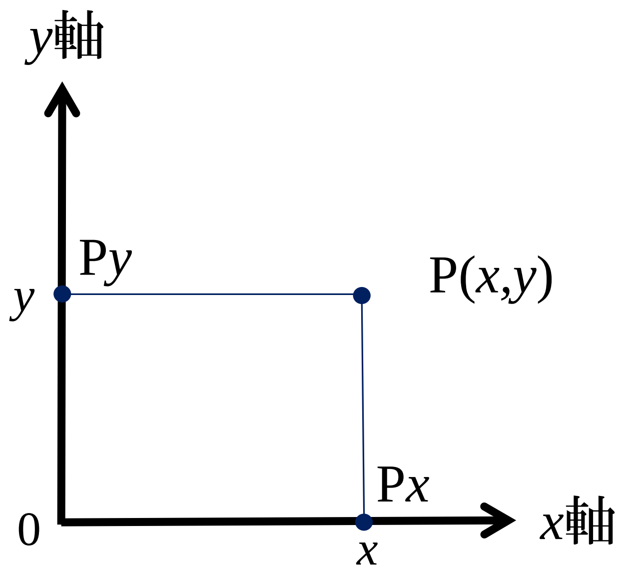
平面運動の分解: 点Pにある質点の、x軸、およびy軸上の射影点Px、Py点の運動として表す

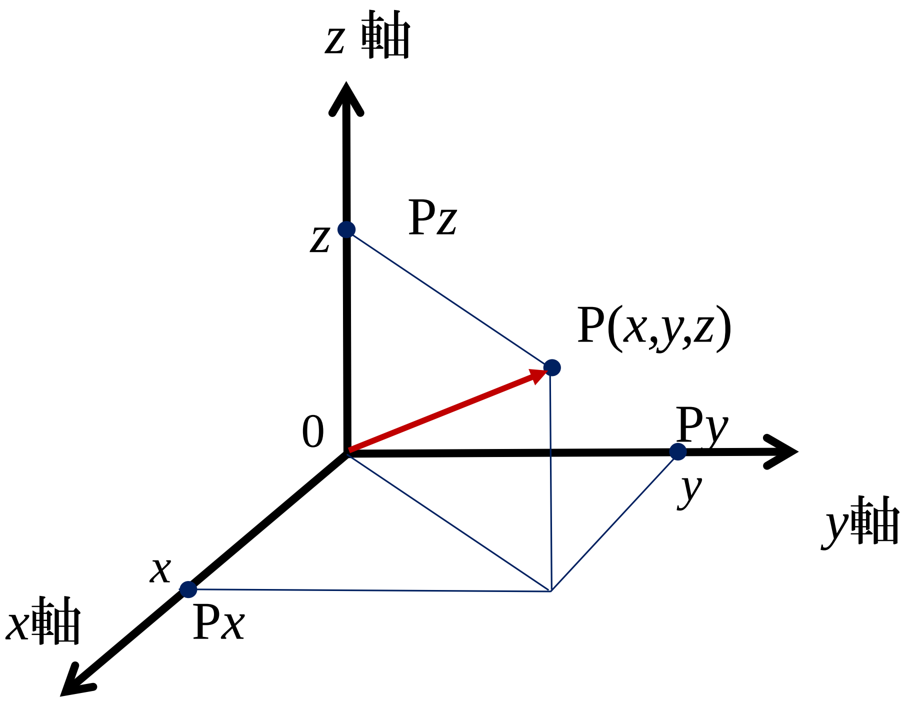
空間内の運動--- 3 つの互いに直交する座標軸をもつ直交座標系O-xyzを用いた座標(x, y, z)

空間運動の分解: 点Pにある質点の、x軸、y軸、z軸上の射影点Px、Py、Pz点の運動として表す

P点の位置ベクトル$\overrightarrow{OP}$ (もしくは単に$\boldsymbol{r}$)

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad (5.2.15)$$





5.2 空間内の運動: 速度と加速度

速度、加速度は**ベクトル**---大きさ、方向、向きを持つ

質点Pの位置が時刻tによって $\boldsymbol{r}$(t) と表されるとき、

(ここで $\boldsymbol{r}(\mathrm{t}) = (x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする)

時刻t (または位置$\boldsymbol{r}$(t)における)速度 $\boldsymbol{v}(t)$

$$\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} \qquad (5.2.16)$$

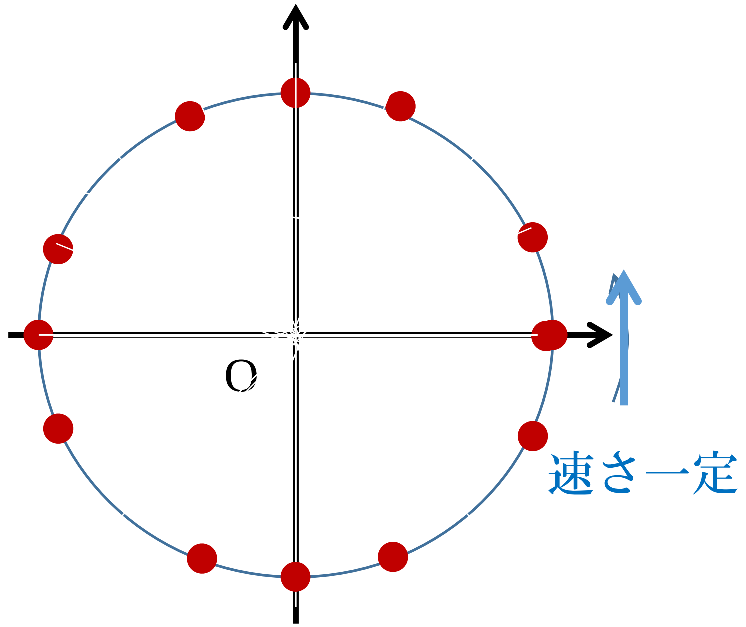
速さ = 速度の大きさ

時刻t (または位置$\boldsymbol{r}$(t)における)加速度 $\boldsymbol{a}(t)$

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k} \qquad (5.2.17)$$

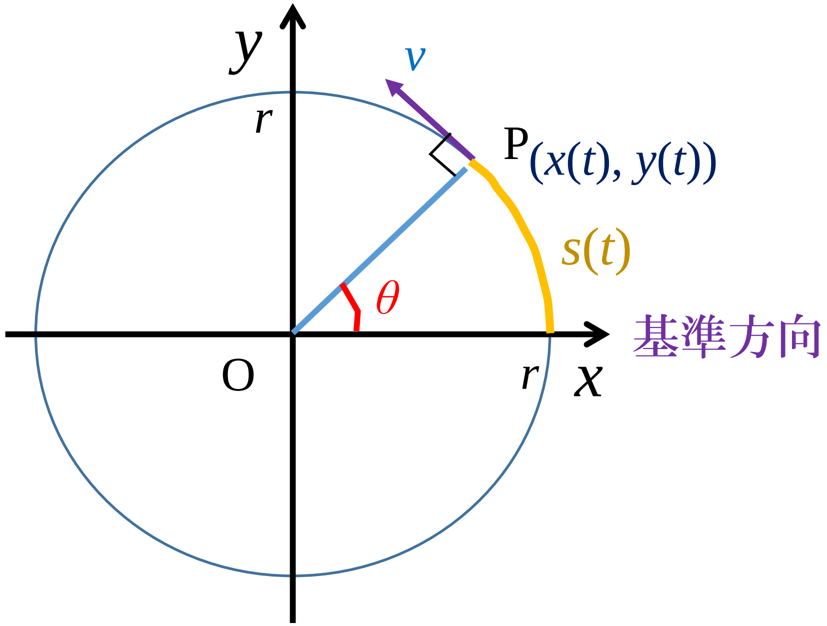
5.3 等速円運動

等速円運動: 平面上にある中心O、一定半径rの円周上を、同じ速さvで回転運動する質点Pの運動



速さ v [m/s]: 毎秒あたりの円周上の移動距離

回転角 θ [rad]: 基準方向から測った、円の中心と質点とを結ぶ方向(動径方向)のなす角



角速度 ω [rad/s]: 毎秒あたりの回転角の変化

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta(t+\Delta t) - \Delta\theta(t)}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (5.3.18)$$

時刻0からt[s]までに円周上を進んだ距離を$s(t)$とすると$s(t) = r\,\theta(t)$ がなりたつことから

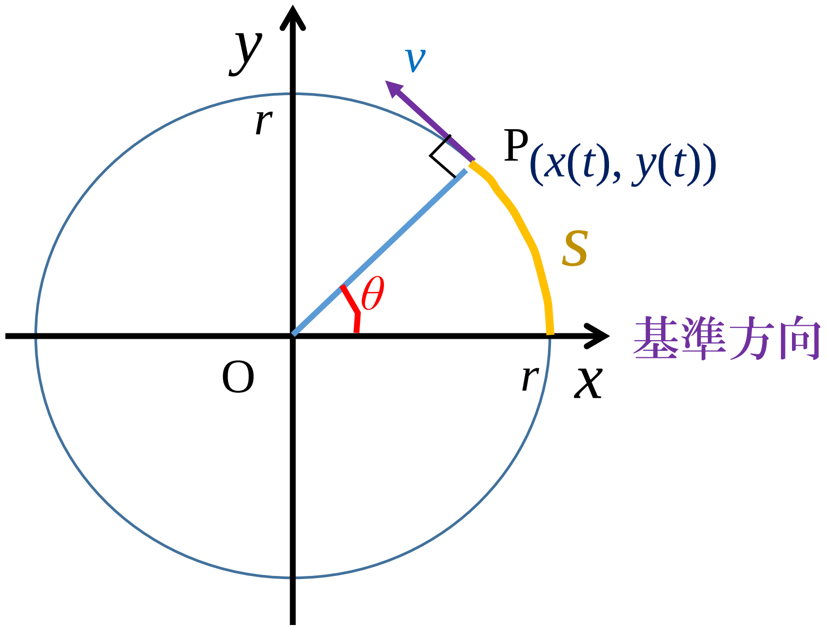
$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \frac{dr\theta}{dt} = r\omega \text{ [m/s]}} \qquad (5.3.19)$$

5.3 等速円運動(続)

周期 T : 円周を1周する時間。単位は秒 s

回転数 n : 1秒間に円周を回る回数。単位は 1/s ---- Hz (ヘルツ)ともいう

$n = 1/T$ [1/s]　　言い換えれば、　$T = 1/n$ [s]



いろいろな量の間の関係のまとめ (r: 円周の半径)

速さ(v) [m/s], 角速度(ω) [rad/s],

回転数(n) [1/s], 周期(T) [s]

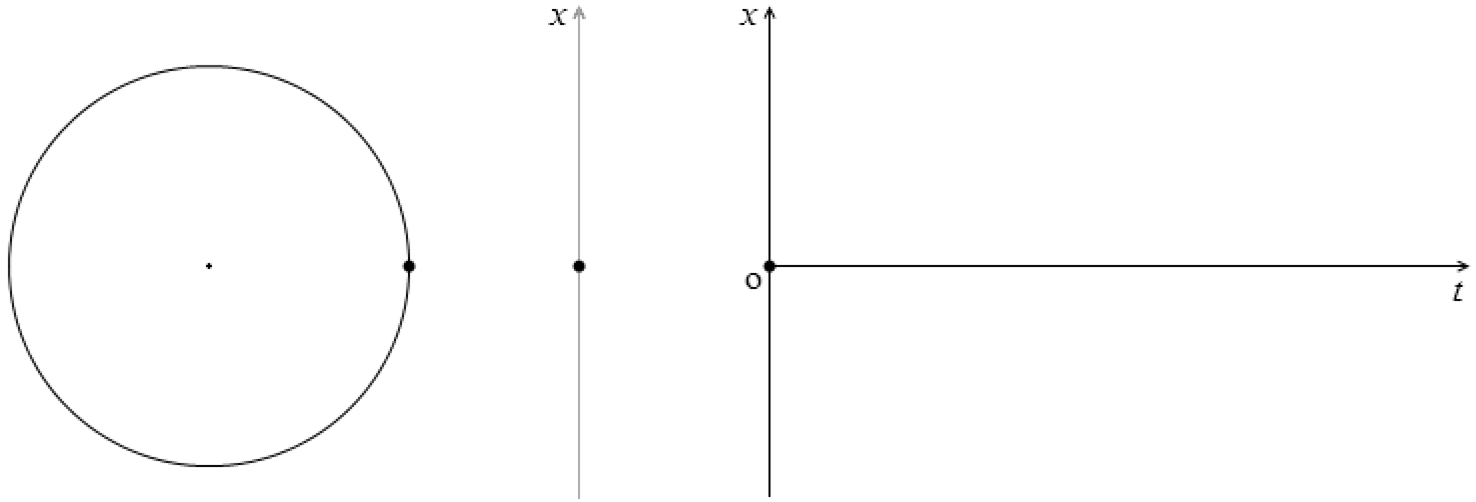
経過時間	円周上の移動距離	角速度	回転数
1	v	ω	n
T	$2\pi r$	2π	1

$$\frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{1} \qquad (5.3.20)$$

単振動と等速円運動

A: 単振動の振幅 --- 回転半径
ω: 角振動数 --- 角速度
$(\omega t+\alpha)$:位相
α: 初期位相(t=0のときの位相)

周期T: 1回振動するのに要する時間 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$
振動数 n: 1秒間あたりの振動回数 (周波数、回転数) $n=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$



等速円運動
円周上を等速で動く

単振動
等速円運動する物体を横から見る

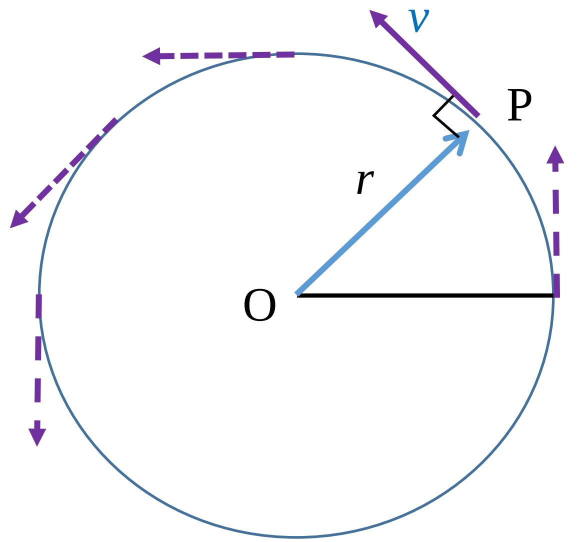
波動(正弦波)
横軸に時間を、縦軸に質点の位置を表すグラフ

等速円運動の位置ベクトル*r*, 速度ベクトル*v*、加速度ベクトル*a*

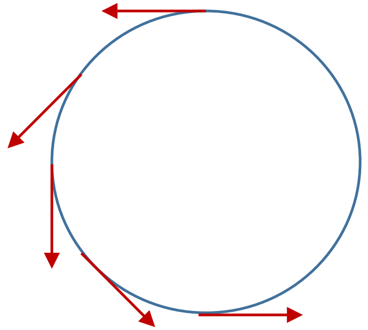
重要な違い: 「等速」円運動 ≠ 「等速度」円運動

等速円運動では、「速さ」(= 速度の大きさ)は変化せず一定

しかし、「速度」は変化している



このように、
速度ベクトルは
始点のまわりを
角速度ωで回転



速度ベクトルの先端は
半径が v $(= r\omega)$ の円周上を
角速度ωで回転
⇒ その速さは $v\omega = r\omega^2$

加速度=速度の変化の割合

このことから、

加速度の大きさ$= v\omega = r\omega^2 = \dfrac{v^2}{r}$

加速度ベクトルは、位置ベクトル$\boldsymbol{r}$
と逆向き ⇒ $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$　　(5.3.23)

問19 (p.68)

小球が半径 r = 5.3 mの円周上を、周期 T = 2.4 s で等速円運動している。この小球の角速度ω、回転数 n, 速さ v, 加速度の大きさ a を求めよ

[解] (5.3.20)を用いる

$$\frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{1} \qquad (5.3.20)$$

(5.3.20)から、$\omega = \frac{2\pi}{T}$ より、$\omega = \frac{2*3.14}{2.4} = 2.61667 = 2.6$ rad/s

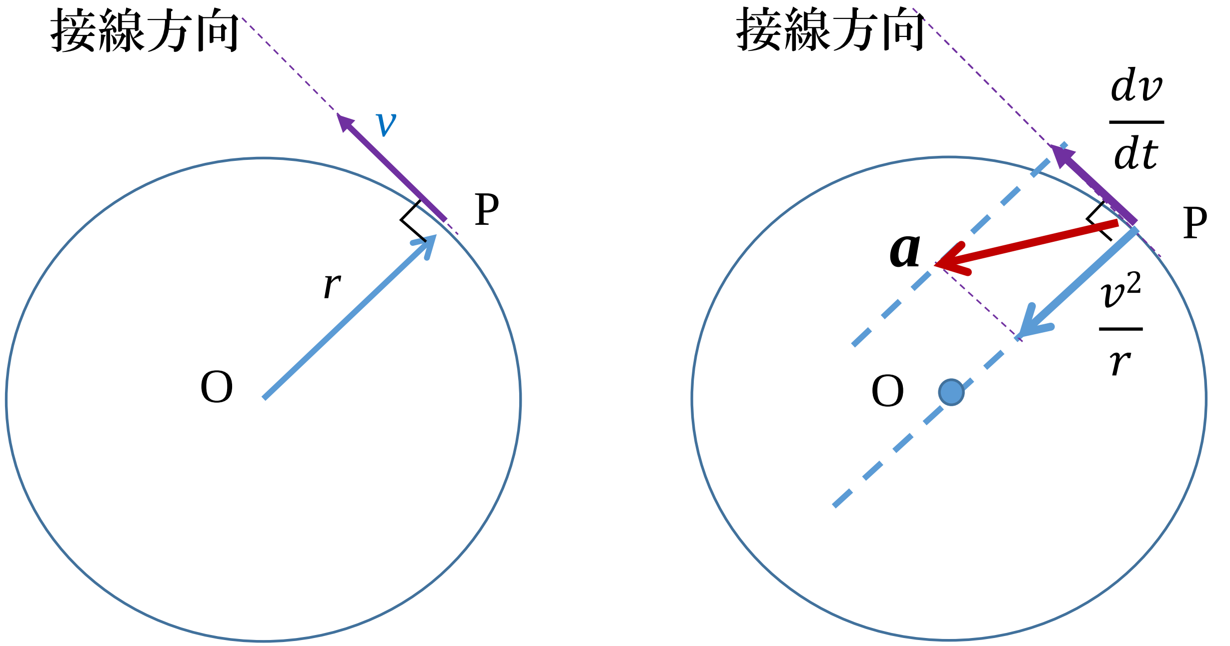
また、$n = \frac{1}{T}$ より、$n = \frac{1}{2.4} = 0.41667 = 0.42$ s^{-1} もしくは 0.42 Hz

$v = \frac{2\pi r}{T}$ より、$v = \frac{2*3.14*5.3}{2.4} = 13.8683 = 14$ m/s

a の値は、(5.3.22)から$a = \frac{v^2}{r} = \frac{13.9^2}{2.4} = 80.504 = 80$ m/s^2

5.4 等速とは限らない一般の円運動

中心O,一定半径rの円周上を、角速度$\omega(t)$, 速さ$v(t)$で、等速とは限らない一般の円運動をする質点Pの位置ベクトル$\boldsymbol{r}$、速度ベクトル$\boldsymbol{v}$、加速度ベクトル$\boldsymbol{a}$を求める



質点Pの位置ベクトル$\boldsymbol{r}(t)$: 点Oを始点、点Pを終点とするベクトル

速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$: 円の接線方向のみの成分 $\boldsymbol{v}(t)= r\omega(t)$ をもつベクトル

加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$:

(i) 円の中心向き: $\frac{v^2}{r}$ の大きさ

(ii) 円の接線方向: $\frac{dv}{dt}$ の大きさ

をもつベクトル

70-71ページは省略します

章末問題５をすべて解いておくこと