物理学(6)

担当: 白井　英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

6章　運動の法則

物体に働く力と運動は、運動の3法則で記述される

運動の第1法則： 慣性の法則

運動の第2法則： 運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

運動の第3法則： 作用・反作用の法則 (2.5節で紹介済み)

運動についての力学の体系は、ケプラー、ガリレオなどの研究を土台にして、17世紀にニュートンによって完成される

Principia (Philosophiae natualis Principia mathematica)として1687年に発表

6.1 運動の第1法則

運動の第１法則は「慣性の法則」ともいう

運動の第1法則：物体が周囲から何の作用も受けていないとき、あるいは受けている力の合力が０のときは、物体は等速度運動する

- 等速度運動(等速直線運動とも）：一直線上を一定の速さで進む(つまり、同じ速度で移動する)運動
- 静止状態: 等速度運動の特殊な場合で、速度がゼロの状態

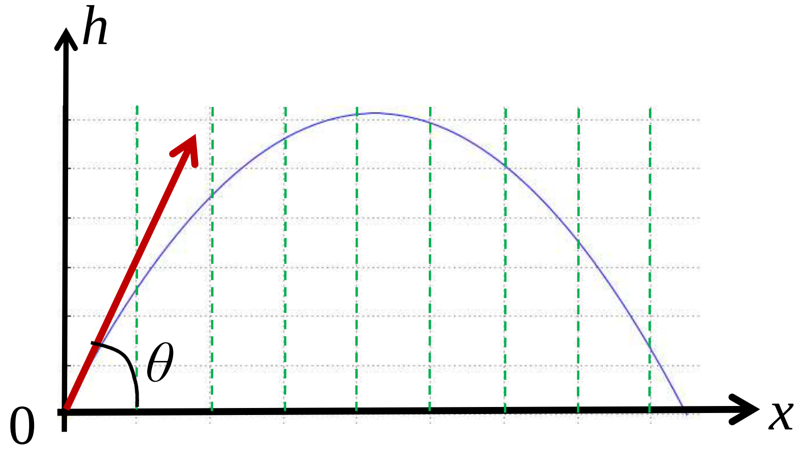
慣性 (inertia)：物体の運動の上記の性質のこと、つまり、元々の運動状態（速度）を一定に保とうとする性質
言い換えると、物体は自力で速度を変えることはできない

物体の慣性を表す現象

1. 水平なガラス板上でドライアイスパックを滑らせる
   つるーっと滑っていき、等速直線運動に近い動きをする

2. 「だるま落とし」
   たたいたブロックのみが飛び出し、他のブロックの水平位置は変わらない

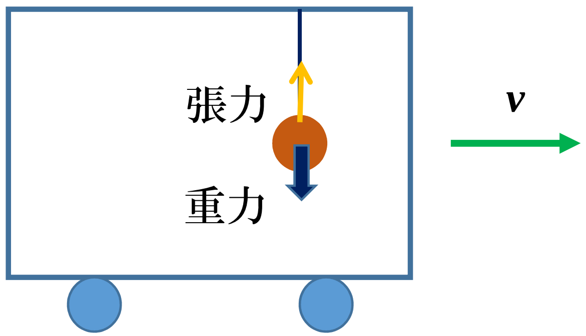
3. 斜方投射した小石の水平方向の運動
   水平方向の運動は等速直線運動に近い



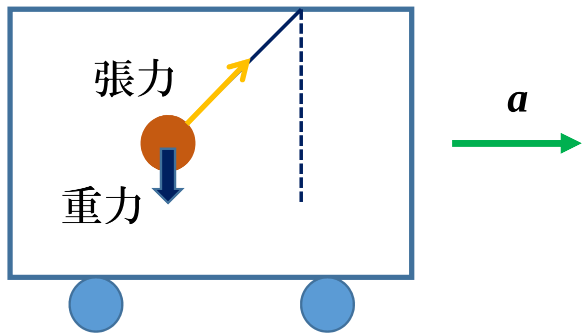
慣性系

慣性系:　運動の第１法則が成り立つ理想的な空間
慣性の法則が成り立つのは、実は特殊な場合
--それにも拘らず、物理学では世界を慣性系とみなす

観測によって物体の位置や速度を計測するのに座標系が必要
等速度運動している座標系なら慣性系とみなせる



等速度運動している座標系



等速度運動ではない座標系

6.2 運動の第2法則と第3法則

力 (force): 物体が受ける作用---物体がそれを受けて等速度運動でない運動をする

物体の運動が等速度運動でないとき、物体は加速度運動をしている、あるいは加速度を持つ、という

慣性質量(mass) : 物体がもつ固有の属性、運動状態の変化のしにくさ

運動の第2法則：

物体の質量と加速度の積は、その物体に働く力に等しい

物体に働く力を $\boldsymbol{F}$, 物体の質量を m、加速度を $\boldsymbol{a}$、速度を $\boldsymbol{v}$、位置を $\boldsymbol{r}$ で表すと　(ニュートンの) 運動方程式

$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$　つまり、$\boldsymbol{F} = m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$（または、$\boldsymbol{F} = m\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$）

単位は N (ニュートン)　$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}$

力も加速度も**ベクトル**なので**太文字**

問20　加速度と力の次元は？

加速度

物体の位置 r は、原点からの距離で測定されるので、
その次元は「長さ」　[L]

速度 $\boldsymbol{v}$ は、微小時間Δt あたりの位置の変化量 $\Delta \boldsymbol{r}$
つまり、　$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$　の次元は、位置(の変化)を時間で割る　[LT^{-1}]

加速度$\boldsymbol{a}$ は 、微小時間Δt あたりの速度の変化量 $\Delta \boldsymbol{v}$
つまり、　$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$　の次元は、速度 (の変化)を時間で割る　[LT^{-2}]

力

運動の第2法則から、力$\boldsymbol{F}$ = 質量 m ・加速度 $\boldsymbol{a}$
したがって、その次元は　[MLT^{-2}]

例題 6.2　自動車を加速する力

直線道路を10 m/s の速さで走っている1000 kg の自動車を、4秒間で20 m/s の速さまで一様に加速した。このとき、自動車に働いていた正味の力はいくらか。またこの力は何から受けているか？

[解] 4秒間で速さが10 m/s から20 m/s まで変化したので、この間の加速度の大きさは、 $\frac{20-10}{4} = 2.5\ \mathrm{m/s^2}$

したがって、運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ より、 自動車にはたらいた正味の力(つまり、加速に使われた力)の大きさは、

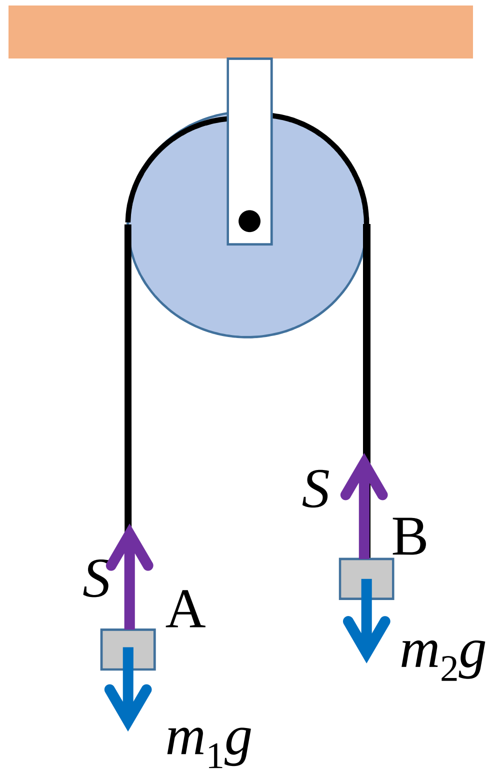
$$F = 1000 \times 2.5 = 2.5 \times 10^3\ \mathrm{N}$$

この力は自動車のエンジンからの力？　エンジンによって車輪を回転させ、車輪が地面から摩擦力を受けて、自動車が動く…

実際、摩擦力がないと車輪は空回りして動かない…だから、地面からの摩擦力によるもの、といえる

例題 6.3　アトウッドの器械

軽いなめらかな滑車に、軽くて伸びない糸をかけ、その両端に物体A(質量m_1)と物体B (質量m_2、$m_1 > m_2$)をつけて静かに手を放す。物体の加速度と糸の張力を求めよ。ただし糸の張力は両端で等しいとしてよい。



[解] 糸の張力をS、重力加速度の大きさを g とする。

まず、それぞれの物体にはたらく力を書き込む。

次に、それぞれの物体ごとに運動方程式をたてる。ここで、物体AとBが伸びない糸で結ばれていることから、これらの加速度の大きさは等しいので、ともに a とおく

A: $m_1g - S = m_1a$　　(鉛直下向きを正とする)

B: $S - m_2g = m_2a$　　(鉛直上向きを正とする)

これを解いて、 $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$　　$S = \dfrac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$

2つのおもりの差を小さくし、aを測定することで、gの値を求める器械

例題 6.4　物体の加速度

質量 5 kg の物体に x軸の正の向きの力 15 N、y軸の負の向きの力 10 N、z軸の正の向きの力 30 N の3つの力が同時に加わった時、物体の加速度はいくらになるか？

[解] 物体にはたらく力が分かっているので、運動方程式をたてて解けば良い。ただし、この場合、x成分、y成分、z成分ごとにわけて書くのがポイント。そこで それぞれの加速度を a_x [m/s²], a_y [m/s²], a_z [m/s²]とおく

x成分：　$15 = 5 \times a_x$　　これより $a_x = 3$ m/s²

y成分：$-10 = 5 \times a_y$　　これより $a_y = -2$ m/s²

z成分：　$30 = 5 \times a_z$　　これより $a_z = 6$ m/s²

以上により、物体の加速度は (3, -2, 6) m/s²

6.2 (ii)運動の第3法則(作用・反作用の法則)

すでに、2章2.5節で述べたとおり

法則 6.3 (ニュートンの) 運動の第 3 法則

物体Aが物体Bから力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$を受けるとき、

物体Bは物体Aから力の作用線を共有し、

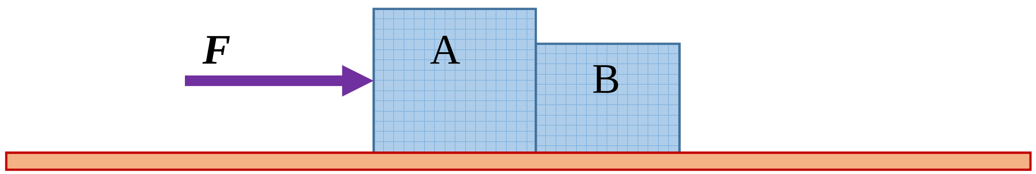
大きさ、方向が等しく、向きが逆の力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}$を受ける。

すなわち、

(2.5.16) $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}} = -\boldsymbol{F}_{\mathrm{BA}}$

例題 6.5　相接して置かれた2つの物体

なめらかな水平面に質量がそれぞれ m_A, m_B の2つの物体 A, Bが相接して置かれている。いま図のようにAを右向きに力$\boldsymbol{F}$で押すとき、A, Bの加速度、およびAとBが押し合う力を求めよ。



[解] 運動の方向は水平方向だけなので、水平方向についてだけ運動方程式をたてる。ここで、AとBは一体となって動くので、2つの加速度は等しいとみなせるから、加速度を$\boldsymbol{a}$ とおく。またBがAから受ける力を $\boldsymbol{R}$ とすると、作用反作用の法則から、AはBから $-\boldsymbol{R}$ の力を受ける。ここで右向きを正とする。

A:　$\boldsymbol{F} - \boldsymbol{R} = m_A \boldsymbol{a}$

B:　$\boldsymbol{R} = m_B \boldsymbol{a}$

2つの式の和: $\boldsymbol{F} = (m_A + m_B)\,\boldsymbol{a}$

$$\therefore\ \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m_A + m_B} \qquad \boldsymbol{R} = \frac{m_B \boldsymbol{F}}{m_A + m_B}$$

6.3 運動の決定

ニュートンの運動方程式

(6.2.1) $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

が、どのように質点の位置を定めているか、の理論的な説明

質点にかかる力$\boldsymbol{F}$が、質点の位置$\boldsymbol{r}(t)$、速度$\boldsymbol{v}(t)$、時刻 t の関数であることを明示するため、

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t))$ と表す

(5.2.16) 速度 $\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ であるから、

Δt が十分小さければ、 $\boldsymbol{v}(t) \fallingdotseq \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ なので、$\boldsymbol{r}(t+\Delta t) \fallingdotseq \boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{v}(t)\,\Delta t$

6.3 運動の決定 (続)

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t) \fallingdotseq \boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{v}(t)\,\Delta t \qquad (6.3.15)$$

ここで、(5.2.17) $\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$

より、Δtが十分小さければ、$\boldsymbol{v}(t+\Delta t) \fallingdotseq \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{a}(t)\,\Delta t$

(6.2.1) $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t)) = m\,\boldsymbol{a}(t)$ であるから、$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t)) / m$ より、

$$\boldsymbol{v}(t+\Delta t) = \boldsymbol{v}(t) + \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}(t))\,\Delta t \qquad (6.3.16)$$

(6.3.15)と(6.3.16)が意味するところ: $\boldsymbol{r}(t)$と$\boldsymbol{v}(t)$と$\boldsymbol{F}$ が与えられれば、十分小さな Δt に対して、 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$と $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$がきまる。これを「新たな」 $\boldsymbol{r}(t')$と$\boldsymbol{v}(t')$とすると $\boldsymbol{r}(t'+\Delta t)$と $\boldsymbol{v}(t'+\Delta t)$がきまる…

これを次々繰り返す：

初期条件を与えると以後の運動が決まる

因果律の成立

章末問題6を解く

確認問題　相接する3つの物体

3両連結の貨物車A, B, Cが、なめらかで水平な直線レールの上にある。A, B, Cの質量はそれぞれm_A, m_B, m_Cとする。いま一定の大きさの力$\boldsymbol{F}$でAをレールにそって水平に引っ張り続ける時、Bを引く力の大きさと、貨物車の加速度の大きさを求めよ。