物理学(7)

担当: 白井　英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

7章　重力による運動

質量m の質点に力 $\boldsymbol{F}$ = (F_x, F_y, F_z)がはたらいている時の運動方程式:　$F_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$　　$F_y = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$　　$F_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2}$

これは、質点の位置座標 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$がみたすべき方程式で、初期条件($t$ = 0における質点の位置$\boldsymbol{r}(0)$と速度 $\boldsymbol{v}(0)$)が与えられると、 6章でみたように、

質点の運動を決定することができる

7章では、重力をうけて運動する質点の運動について述べる:

自由落下、放物運動、重力と空気の抵抗力を受ける運動

7.1 放物運動

例題7.1 一様な重力をうけて水平面上の一点Oから、水平方向とθ_0の角をなす方向に速さv_0で投げ出された質量mの質点の運動(斜方投射)を求める。

点Oを原点、投げ出した方角の水平方向をx軸、鉛直方向をy軸にとり、運動はxy平面内で起こるものとする

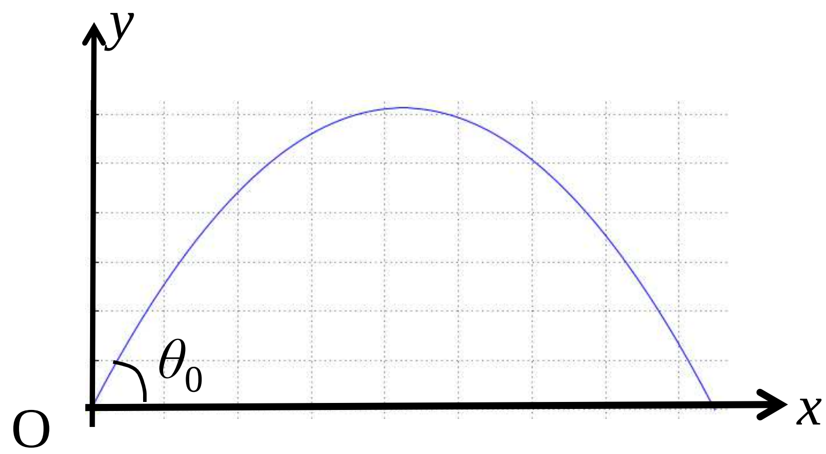
[解] 質点の運動の水平方向(右向き正)と垂直方向(上向き正)の成分ごとに運動方程式：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

初期条件: t=0 において、 $x = y = 0$

$$v_x \ \left(= \frac{dx}{dt}\right) = v_0 \cos\theta_0$$

$$v_y \ \left(= \frac{dy}{dt}\right) = v_0 \sin\theta_0$$



例題7.1 一様な重力をうけて水平面上の一点Oから、水平方向とθ_0の角をなす方向に速さv_0で投げ出された質量mの質点の運動(斜方投射)を求める。

運動方程式： $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg$ (7.1.1)

初期条件: t=0 において、 $x = y = 0$

v_x $\left(= \dfrac{dx}{dt}\right) = v_0 \cos\theta_0$ v_y $\left(= \dfrac{dy}{dt}\right) = v_0 \sin\theta_0$

(7.1.1) 式から $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -g$ (7.1.2)

となるので、水平方向は等速運動、鉛直方向は等加速度運動

(7.1.2)式を積分して($C1$, $C2$は定数)、

$\dfrac{dx}{dt} = C1,$ $\dfrac{dy}{dt} = -g\,t + C2$ (7.1.3)

初期条件から$C1 = v_0 \cos\theta_0$, $C2 = v_0 \sin\theta_0$

(7.1.3)式を積分して($C1'$, $C2'$は定数)、

$x = (v_0 \cos\theta_0)t + C1'$

$y = -\frac{1}{2} g\,t^2 + (v_0 \sin\theta_0)t + C2'$

初期条件から$C1'=0$, $C2' = 0$

ゆえに、

$x = (v_0 \cos\theta_0)\,t$

$y = -\frac{1}{2} g\,t^2 + (v_0 \sin\theta_0)\,t$

(7.1.6)

質点の軌道の式

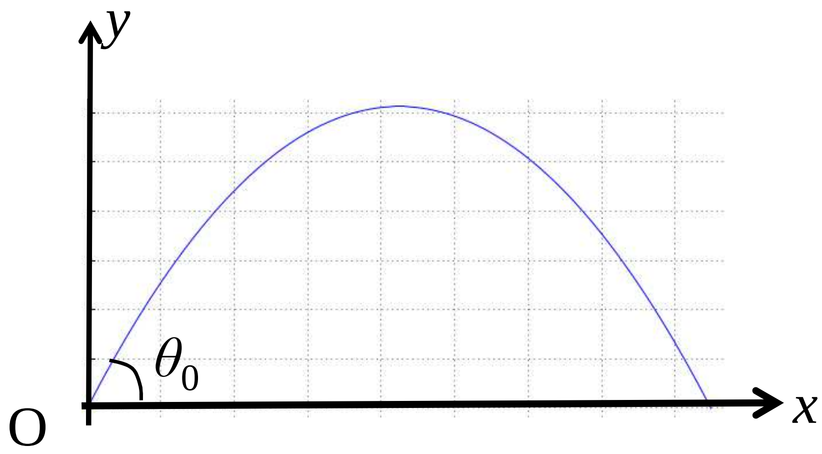
$x = (v_0 \cos\theta_0)\, t \qquad y = -\frac{1}{2} g\, t^2 + (v_0 \sin\theta_0)\, t \qquad (7.1.6)$

この第1式から、 $t = x / (v_0 \cos\theta_0)$ となるので、第2式に代入

$$y = -\frac{g}{2v_0 cos^2\theta_0} x^2 + (\tan\theta_0)x \qquad (7.1.7)$$

これはxの2次式

---- 一様な重力のもとで投げ出された質点の軌道の式



例題7.2 放物運動の水平到達距離と最高点

一様な重力をうけて水平面上の一点Oから、水平方向とθ_0の角をなす方向に速さv_0で投げ出された質量mの質点の水平到達距離Lと最高点の高さHを求めよ

[解] 例題7.1の結果から、

$$x = (v_0 \cos\theta_0)\, t$$

$$y = -\frac{1}{2} g\, t^2 + (v_0 \sin\theta_0)\, t$$

$y = 0$ となる t の値を求めると、

$$t = 0,\quad \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$$

$t = \dfrac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$ を xの式に代入して

$$L = (v_0 \cos\theta_0)\frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{2v^2{}_0 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} = \frac{v^2{}_0 \sin 2\theta_0}{g}$$

最高点は、 yの最大値なので、 $y = -\dfrac{1}{2} g\left(t - \dfrac{v_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2 + \dfrac{v^2{}_0 \sin^2\theta_0}{2g}$ から

$$H = \frac{v^2{}_0 \sin^2\theta_0}{2g}$$

問 21　同じ初速の大きさで斜方投射された質点の水平到達距離が最も長くなる投射角を求めよ

[解]初速をv_0、投射角をθとすると、

例題7.2の結果から、$L = \dfrac{v^2{}_0 \sin 2\theta}{g}$

これから(gもv_0も定数なので)、Lが最大となるには、

$\sin 2\theta$ が最大値、つまり $\sin 2\theta = 1$となればよい。

このことから、 $2\theta = 90°$ 、すなわち　$\theta = 45°$

問 22　質点1と質点2が同じ初速の大きさで、それぞれ水平方向から45° および60°の投射角で投げ出された。質点2の最高到達距離は質点1の何倍か？

注意: 問題文を変更！

[解]初速をv_0、投射角をθ_0 とすると、

例題7.2の結果から、最高点の高さ $H = \dfrac{v^2{}_0 \sin{}^2\theta_0}{2g}$

これから質点1の最高点 $H1 = \dfrac{v^2{}_0 \sin{}^2 45^\circ}{2g}$

質点2の最高点 $H2 = \dfrac{v^2{}_0 \sin{}^2 60^\circ}{2g}$

ゆえに、 $H2/H1 = \dfrac{\frac{v^2{}_0 \sin{}^2 60^\circ}{2g}}{\frac{v^2{}_0 \sin{}^2 45^\circ}{2g}} = \dfrac{\sin{}^2 60^\circ}{\sin{}^2 45^\circ} = \dfrac{3/4}{1/2} = \dfrac{3}{2} = 1.5$

7.2 重力と空気抵抗を受ける場合の運動

質量mの質点が、

一様な重力と速度に比例した空気の抵抗力をうけて運動する質点の速度を $\boldsymbol{v}$、質点に作用する一様な重力を $m\boldsymbol{g}$、速度に比例する空気の抵抗力を $-mk\boldsymbol{v}$ (kは単位質量あたりの比例定数)とすると質点の運動方程式は、

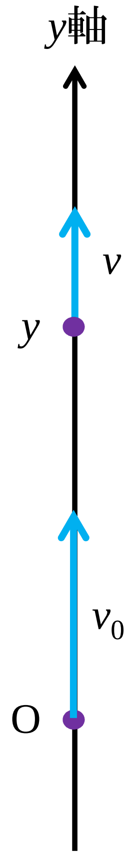
$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{g} - mk\boldsymbol{v} \qquad (7.2.10)$$

初期条件のもとでこの方程式を解いて、速度$\boldsymbol{v}(t)$を求める

注意: 鉛直下向きを正としている

例題7.3 空気抵抗を受けた鉛直投げ上げ

一様な重力と速度に比例した空気の抵抗を受けて点Oから速さv_0で鉛直上向きに投げ上げられた質量mの質点の t 秒後の速度、位置、および $t\rightarrow\infty$での速度(終速度)を求めよ。点Oを原点とし、鉛直上方にy軸を取る



[解] 質点の運動はy軸上の直線運動。空気抵抗の比例定数をkとする。

初期条件(t=0)は、y=0 v (=$\frac{dy}{dt}$) = v_0

投げあげてから t 秒後の速度を $\boldsymbol{v}$ とすると、

質点の運動方程式: $m\frac{dv}{dt} = -mg - mk\boldsymbol{v}$

これを解くと、 $v = -\frac{g}{k} + C_1 e^{-kt}$ (C_1は積分定数)

ここで、初期条件をいれて $C_1 = \frac{g}{k} + v_0$ となるので、t 秒後の速度は

$v = -\frac{g}{k} + (\frac{g}{k} + v_0)e^{-kt}$

$\boxed{\text{終速度は} t\rightarrow\infty \text{とすると、} e^{-kt} \rightarrow 0 \text{から、} v = -\frac{g}{k}}$

例題7.3 空気抵抗を受けた鉛直投げ上げ(続)

初期条件(t=0)は、y=0 v (=$\frac{dy}{dt}$) = v_0

t 秒後の速度は　$v = -\frac{g}{k} + (\frac{g}{k} + v_0)e^{-kt}$

速度が求まったので、 t 秒後の位置は、速度をt で積分して

$$y = -\frac{g}{k}t - \frac{1}{k}(\frac{g}{k} + v_0)e^{-kt} + C_2 \qquad (C_2は定数)$$

初期条件(t = 0で y = 0)から、 $C_2 = \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k} + v_0\right)$

これから、t 秒後の位置　$y = -\frac{g}{k}t - \frac{1}{k}(\frac{g}{k} + v_0)e^{-kt} + \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k} + v_0\right)$

もしくは、$y = -\frac{g}{k}t - \frac{1}{k}(\frac{g}{k} + v_0)(e^{-kt} - 1)$ (7.2.15)

例題7.3における微分方程式の解法

投げあげてから t 秒後の速度を $\boldsymbol{v}$ とすると、

質点の運動方程式: $m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -mg - mk\boldsymbol{v}$

これを解くと、 $v = -\frac{g}{k} + C_1e^{-kt}$

$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -mg - mk\boldsymbol{v}$ をmで割って $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -(g+kv) = -k(\frac{g}{k}+v)$ から $\frac{1}{(\frac{g}{k}+v)}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -k$

両辺を t で積分すると $\int$ 左辺 $=\int \boxed{\frac{1}{(\frac{g}{k}+v)}}\boxed{\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}dt = \int \frac{1}{(\frac{g}{k}+v)}dv = \log(\frac{g}{k}+v)+c$ (cは定数)

$\int$ 右辺 $= \int -k\,dt = -kt + c'$ (c'は定数)

$h(t)=v$

置換積分法:

$\int \boxed{f(h(t))}\boxed{h'(t)}dt = \int f(x)dx$

これらから、 $\log(\frac{g}{k}+v) = -kt + C$ (Cは定数)

$\therefore v = -\frac{g}{k} + C_1e^{-kt}$

問 23　空気抵抗の比例定数が質点の質量によらない場合（$mk = k' =$ 一定定数の場合）、終速度は質量に比例することを示せ

[簡便な解]

例題7.3 の結果の終速度

$v = -\frac{g}{k}$　において、

$mk = k'$　から $k = k' / m$ を代入して

$v = -\frac{mg}{k'}$

重い物体ほど落下速度が速い！

ゆえに、終速度は m、つまり質量に比例する

空気の抵抗

空気の抵抗を考えなければ、
1,000m上空から落ちる雨粒の落下速度は、140 m/s、時速では 500km/h

しかし実際の雨粒の落下速度は、
0.03mgの重さだと 1.7 m/s、20mgの重さだと7 m/s
このように、雨粒の落下速度は質量によって異なる

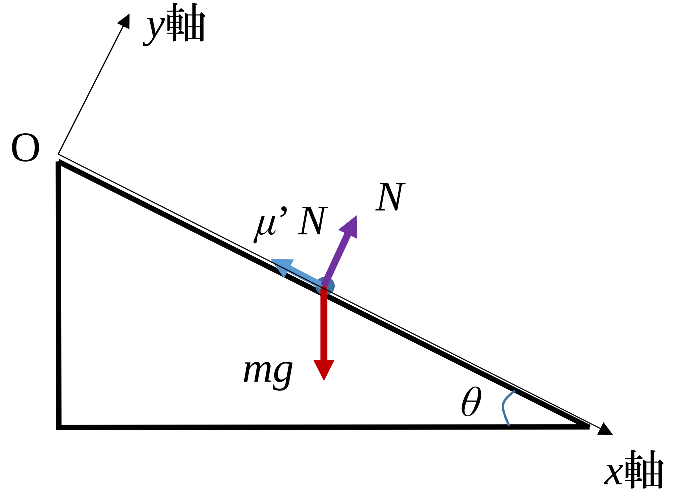
自然界では、摩擦や抵抗が無視できない

クイズ: 初速度620m/s、水平面からの角45°上方向に発射された弾丸は、空気の抵抗が無視できれば約40km先の地点まで飛ぶ。空気中では実際にはどのくらいまで飛ぶだろうか？　(1) 5km以下, (2)5～20 km, (3)20km以上

7.3 斜面上の運動

例題7.4 水平方向とθの角をなす斜面をもつ台が固定されている。一様な重力の下、この斜面上の点Oに置かれた質量mの質点が、斜面からの摩擦力をうけながら、静止状態から最急傾斜の方向に滑り落ちていく運動を決定せよ。

ただし、この質点と斜面との運動摩擦係数をμ'とする



[解] 点Oを原点とし、斜面方向下向きにx軸、斜面と垂直な方向上向きにy軸をとる。重力加速度を$\boldsymbol{g}$とする。質点にはたらく力は

重力$m\boldsymbol{g}$、斜面からの垂直抗力N、運動摩擦力$\mu' N$

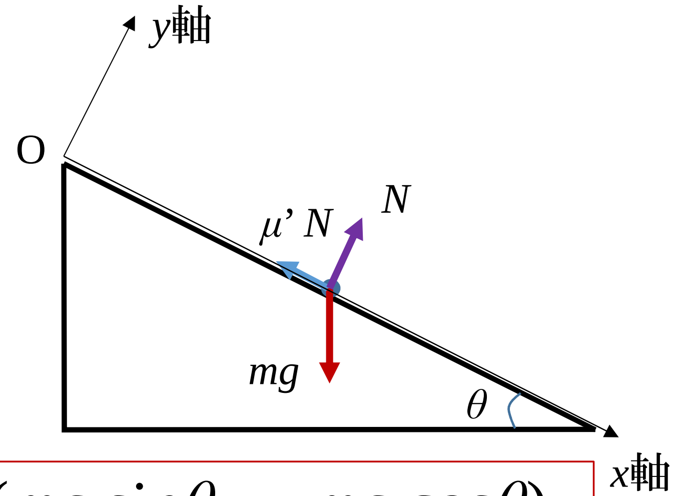
これらを成分表示すると:

重力： $(mg\sin\theta, -mg\cos\theta)$

斜面からの垂直抗力：$(0, N)$

運動摩擦力: $(-\mu' N,\ 0)$

例題7.4 (続き)



運動を始めてt秒後の質点の位置を $(x(t), y(t))$、速度を$\boldsymbol{v}(t)$ とすると、$x(0)=y(0)=0$, $\boldsymbol{v}(0)=0$, また$y(t) = 0$

y方向には力がつりあっている: $0 = N - mg\cos\theta$

また運動方程式は: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\theta - \mu' N$

重力：　$(mg\sin\theta, -mg\cos\theta)$
斜面からの垂直抗力：$(0, N)$
運動摩擦力: $(-\mu' N,\ 0)$

Nの値を代入し簡単化:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)$$

両辺をtで積分: $\dfrac{dx}{dt} = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t + C$　(Cは定数)

初期条件(t=0で、$v(t)$=0)から　$\dfrac{dx}{dt} = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t$

この両辺をtで積分: $x = \dfrac{1}{2}g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2 + C'$　(C'は定数)

初期条件(t=0で、$x(t)$=0)　$x = \dfrac{1}{2}g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)t^2$