物理学(8)

担当: 白井　英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

8章　円運動

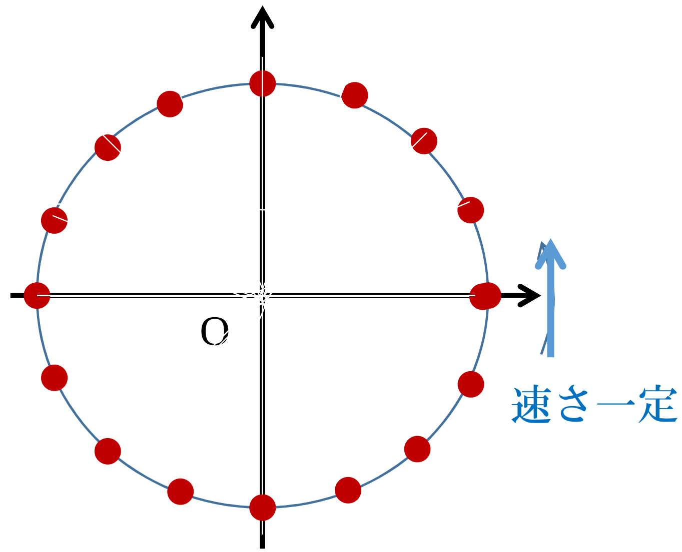
平面内で円運動をする質点の運動

運動方程式を用いた運動の決定や、向心力、万有引力と重力との関係について述べる

8.1 等速円運動する物体にはたらく力

復習: (5.3節)

等速円運動: 平面上にある中心O、一定半径rの円周上を、同じ速さvで回転運動する質点の運動



速さ v [m/s]: 毎秒あたりの円周上の移動距離

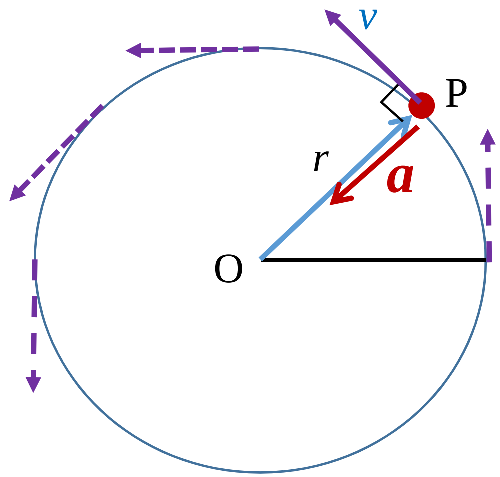
角速度 ω [rad/s]: 毎秒あたりの回転角

平面内で等速円運動する点の加速度 $\boldsymbol{a}$:

円の中心方向、大きさは $\dfrac{v^2}{r}=r\omega^2$

円の中心を原点とする点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると

加速度 $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$ (8.1.1)



したがって、質点にはたらく力

$\boldsymbol{F} = -m\,\omega^2\boldsymbol{r}$ (8.1.2)

公式8.1 向心力の大きさ

等速円運動する物体にはたらく力

$$\boldsymbol{F} = -m\,\omega^2\,\boldsymbol{r} \qquad (8.1.2)$$

(負号がついていることから、$\boldsymbol{F}$の向きは$\boldsymbol{r}$と逆向き)

また、$\dfrac{v^2}{r}=r\omega^2$ から ($v = r\omega$)、

$$|\boldsymbol{F}| = m\,r\omega^2 = m\,\frac{v^2}{r} \qquad (8.1.3)$$

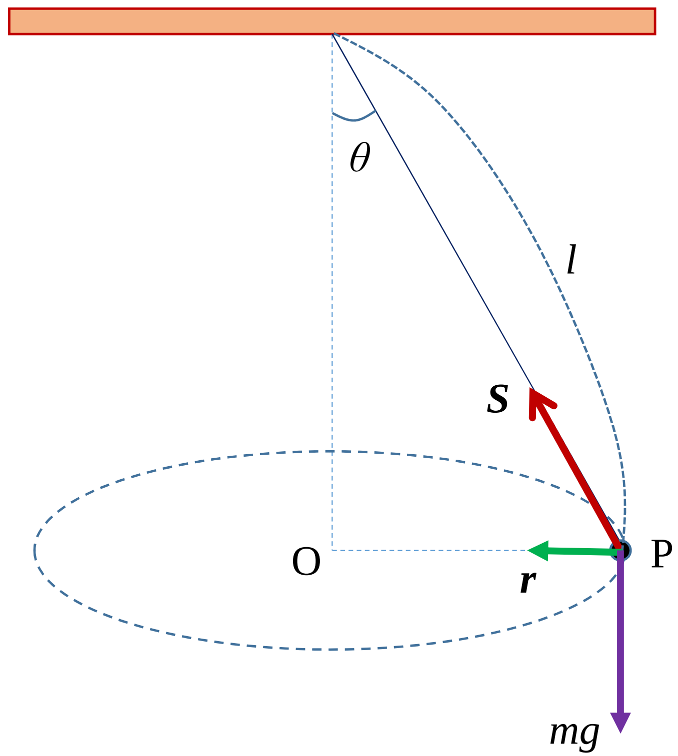
これが、向心力の大きさ

例題8.1 円錐振り子

円錐振り子: 右図のように、天井の一点から長さ l の軽くて伸びない糸を垂らし、その先に質量mの質点をつけ、糸を鉛直下方より常に一定角だけ傾けながら、質点を水平面内で等速円運動させたもの。

問題: 質点の速さと糸の張力を求めよ。ただし、重力加速度の大きさをgとする

解: 質点にはたらく力をすべて書き込んで考える: 糸の張力$\boldsymbol{S}$, 重力 $m\boldsymbol{g}$



例題8.1 円錐振り子

重力と張力のつり合い: $S\cos\theta = mg$

これから $S = \dfrac{mg}{\cos\theta}$ (8.1.6)

張力と重力の合力($\boldsymbol{r}$)の大きさ: $S\sin\theta$

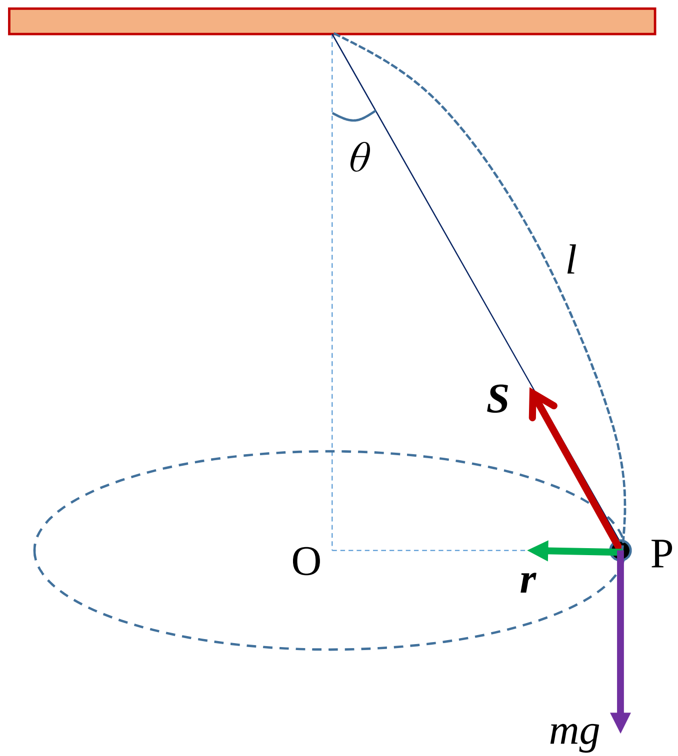
円運動に注目すると

半径 $r = l\sin\theta$、 向心力 $m\dfrac{v^2}{r}$

向心力＝合力　なので、

$$S\sin\theta = mg\tan\theta = m\frac{v^2}{r}$$

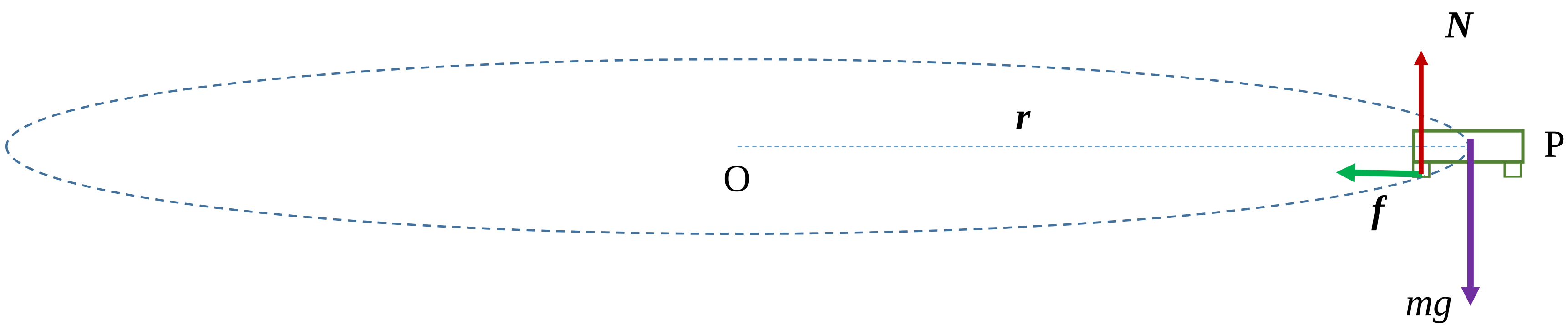
したがって、$v^2 = gr\tan\theta$



これより、 $v = \sqrt{gl\sin\theta\tan\theta}$ (8.1.7)

例題8.2　自動車の円運動

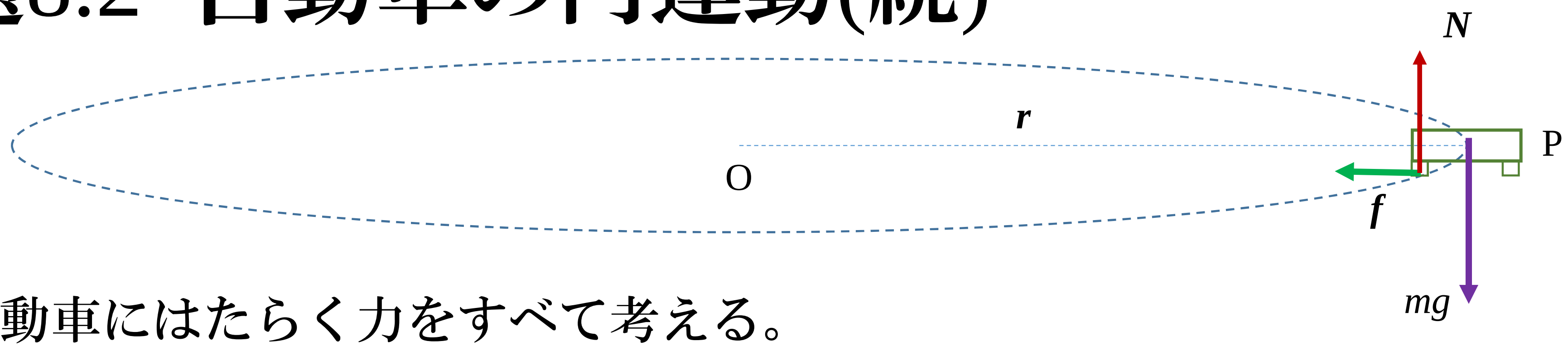
水平で平坦な道路を走る質量mの自動車が、半径rのカーブを曲がる。タイヤと道路の静止摩擦係数をμとして、自動車が横滑りせずにカーブを曲がるために必要な速さの範囲を求めよ。ただし、重力加速度の大きさをgとする。



疑問: なぜ動摩擦係数ではなく静止摩擦係数が関係するのか？

答: 自動車は確かに進行方向には動いているが、横方向は「静止」しているとみなせる。そして、ここで求めたいのは、自動車が横滑りしない条件、つまり横方向に「滑り出さない」ための条件だからである。

例題8.2　自動車の円運動(続)



解答:　自動車にはたらく力をすべて考える。

重力 mg、道路面からの垂直抗力 N、静止摩擦力 f が自動車にはたらいている。
この合力が向心力となり、半径rの円周上を円運動しているとみなせる。自動車の速さを vとすると、向心力の大きさは　$m\dfrac{v^2}{r}$

これにより力のつり合いの条件は

垂直方向:　$N = mg$

水平方向:　$f = m\dfrac{v^2}{r}$

静止摩擦力の制約から($f_{\max}$ は最大静止摩擦力)

$$f \leqq f_{\max} = \mu N$$

$$\therefore \quad m\frac{v^2}{r} \leqq \mu N = \mu mg$$

したがって、$\boxed{v \leq \sqrt{\mu r g}}$

問 24 1500kgの自動車が半径35mのカーブをまがるための速さの範囲を求める。ただし、静止摩擦係数を0.50とする

各自、解いてみること

実際には横滑りだけではなく、転倒の可能性もある。
それについても検討してみるとよいだろう(自動車のサイズ、重心の位置は適当に仮定せよ)

8.2 等速とは限らない円運動する物体

復習(5.4節) 中心O,一定半径rの円周上を、角速度$\omega(t)$, 速さ$v(t)$で、等速とは限らない一般の円運動をする質点Pの位置ベクトル$\boldsymbol{r}$、速度ベクトル$\boldsymbol{v}$、加速度ベクトル$\boldsymbol{a}$

質点Pの位置 $\boldsymbol{r}(t)$: 点Oを始点、点Pを終点とするベクトル

速度 $\boldsymbol{v}(t)$: 円の接線方向の成分 $v(t) = r\omega(t)$ をもつベクトル

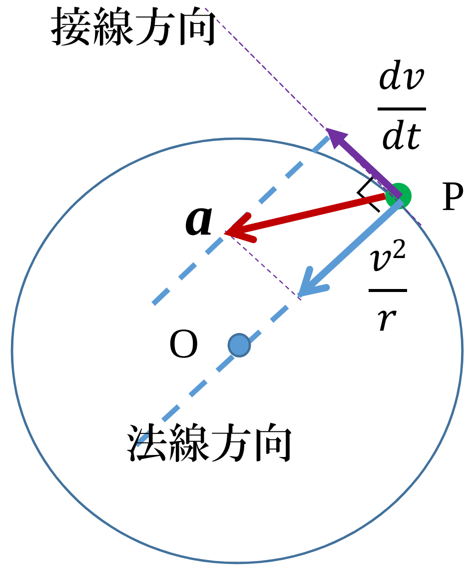
加速度 $\boldsymbol{a}(t)$:

(i) 円の中心方向: $\frac{v^2}{r}$ の大きさ

(ii) 円の接線方向: $\frac{dv}{dt}$ の大きさ

よって、質点Pの法線方向の運動方程式: $F_n = m\frac{v^2}{r}$

接線方向の運動方程式: $F_t = m\frac{dv}{dt}$



F_n、F_tは質点にはたらく力Fの法線方向成分、接線方向成分

8.3 人工衛星の運動

万有引力のもとでの運動の例として、地球の周りをまわる人工衛星の運動について述べる。ただし、人工衛星は等速円運動しているものとみなす

万有引力

万有引力:　惑星の運動の観察に基づくニュートンの考察

質量を持つ全ての物体同士に間に引力がはたらく

引力は、質量の積に比例し、距離の２乗に反比例する

法則 8.3　万有引力の法則

　質量m_1と質量m_2の物体が距離rだけ離れた位置にあるとき、

　２物体を結ぶ直線にそって両者の間に質量の積に比例し、距離の２乗に反比例する以下の引力Fがはたらく

$$F = \mathrm{G}\,\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{8.3.14}$$

ここで Gは物体や距離に無関係な定数、万有引力定数

$$G = 6.673\times10^{-11}\ \ \mathrm{Nm^2/kg^2}$$

例題8.3　人工衛星の運動

地球からの万有引力を受けて、地球の中心Oを中心とする一定半径 r の円軌道上を運動する質量mの人工衛星の速さと円運動の周期を求めよ。ただし、万有引力定数をG、地球の質量をMとする

[解] 人工衛星が地球から受

(8.3.14)から　$F = G\dfrac{Mm}{r^2}$

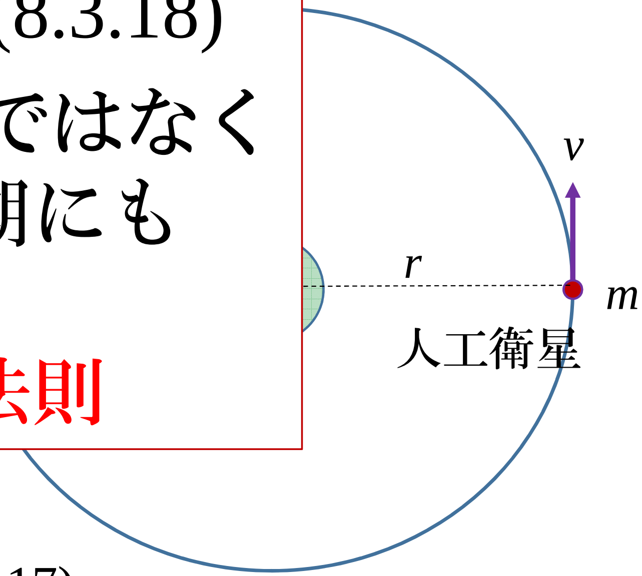
これを向心力として、人工
いると考える

人工衛星の速さをvとす

$F = m\dfrac{v^2}{r}$　従って、

ゆえに、$v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$　(8.3.16)

等速円運動していることから、周期$T = \dfrac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM}}$　(8.3.17)



この結果から、

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \qquad (8.3.18)$$

これは人工衛星だけではなく太陽の惑星の公転周期にもあてはまる

ケプラーの第３法則

例題8.4　地表付近での重力加速度の大きさ

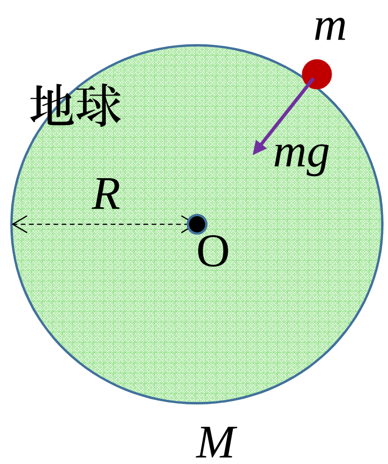
地表付近での重力加速度の大きさgは、質量mの質点が受けている重力の大きさmgが地球からの万有引力の大きさに等しいことから、万有引力定数をG、地球の質量をM、地球の半径Rを用いて次の式で与えられることを示せ

$$g = \frac{GM}{R^2} \qquad (8.3.19)$$

[解] 質量mの質点が受けている重力の大きさ mg は地球からの万有引力の大きさに等しいので、(8.3.14)から

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \qquad (8.3.20)$$

ゆえに、$g = \frac{GM}{R^2}$ (8.3.21)



参考: (8.3.21)より $M=\frac{gR^2}{G}$ ⇒ g, R, Gの測定値からMの値を推定できる

公式8.4

地球の質量 M と、地表付近での重力加速度の大きさ g との関係 (Gは万有引力定数、Rは地球の半径)

$$GM = g R^2$$

問25　地球の質量を推定せよ

地表付近での重力加速度の大きさ g = 9.8 m/s^2

万有引力定数 G = 6.673×10^{-11}　Nm^2/kg^2

地球の半径 R = 6.4×10^6 m

[解] 公式8.4　$GM = g\,R^2$　　を用いる。これを変形して

$$M = \frac{g\,R^2}{G}$$　から、

M = 9.8× (6.4×10^6)^2 / (6.673×10^{-11})

≒ 6.0154×10^{24}

有効数字２桁であるので、 6.0 ×10^{24}　kg

例題8.5　静止衛星の軌道半径

「静止衛星」は赤道上空の円軌道を一定の速さで回っている。この静止衛星の円軌道の半径を求めよ。ただし、地球の半径 R を 6.4×10^6 m 、地表付近での重力加速度の大きさgを9.8 m/s^2 とする

[解] 万有引力定数をG, 地球の質量をM, 静止衛星の軌道半径をr、この衛星の周期Tとすると、例題8.3 (8.3.18)より

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

なお、静止衛星であるから、周期は1日なので、 $T = 24*60*60 = 8.64\times10^4$ s

また公式8.4より　$GM = g R^2$

この２つの式から、 $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{g R^2} r^3$

したがって、 $r = \sqrt[3]{\dfrac{g R^2 T^2}{4\pi^2}}$

これにg, R, Tの値を代入して、

$r \fallingdotseq 4.23\times10^7$ m

有効数字２桁なので、 4.2×10^7 m