物理学(9)

担当: 白井　英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

9章　振動

弾性力を受けて運動する質点の運動や単振り子の微小運動について

弾性力による単振動、弾性力と抵抗力による減衰振動などの典型的な振動運動の扱い方を学ぶ

9.1 単振動

単振動について5.1.2節で解説している

例題 9.1　x軸上で、原点Oからの距離xに比例する引力 $-kx$ (kは正の比例定数)を受けて運動する質量mの質点の運動の一般解を求める

質点の運動方程式　$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (9.1.1)$$

このマイナスが大事！
これは力と逆向きの加速度をもつことを意味

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とすると、(9.1.1)式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (9.1.12)$$

となる。これは(5.1.14)と同じ式

(9.1.2) $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$　の一般解

一般解: どのような初期条件でも再現できるような式
ここで(9.1.2)の一般解には、２つの任意定数C_1 と C_2を含む:

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

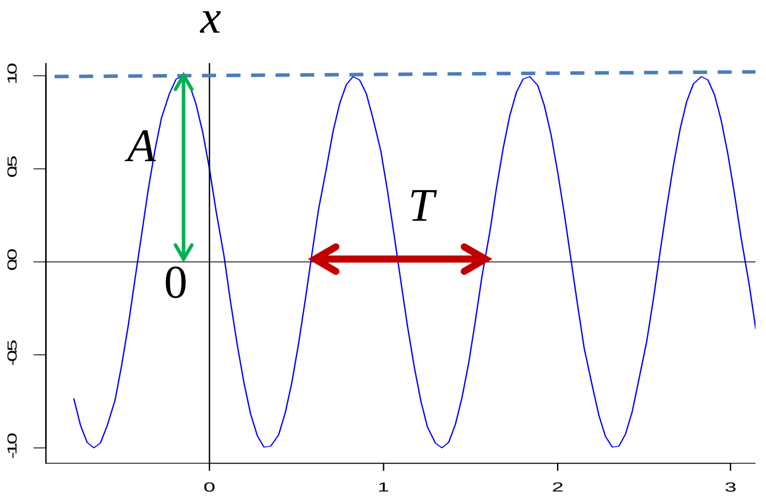
C_1 と C_2は初期条件(t=0での位置と速度の値)によって定まる

$A = \sqrt{C_1{}^2 + C_2{}^2}$, $\cos\varphi = \frac{C_1}{\sqrt{C_1{}^2+C_2{}^2}}$, $\sin\varphi = \frac{C_2}{\sqrt{C_1{}^2+C_2{}^2}}$　とすると、

$$x(t) = A(\sin \omega t \cos\varphi + \cos \omega t \sin\varphi) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (9.1.5)$$

これは(5.1.8)と同じ　--- 単振動の運動を表す

単振動　$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$



単振動の運動(5章の復習)

x の値は $[-A, A]$ の範囲を往復する

A : 単振動の振幅, 単位は m

ω : 角振動数, 単位は rad/s

φ : 初期位相, 単位は rad

$\omega t+\varphi$: 位相, 単位は rad

周期(T) : 一往復する時間、単位は s

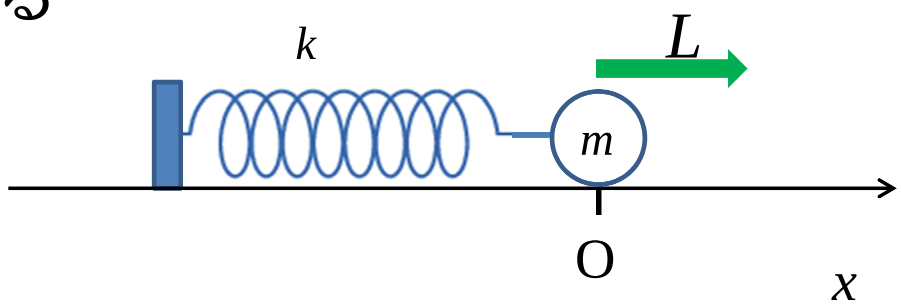
振動数(n): 1秒間の往復回数、単位はHz (または 1/s)

$T = 1/n = 2\pi/\omega$

単振動の微分方程式: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$　　(9.1.2) = (5.1.14)

例題9.2 バネの力による単振動

質量が無視できるバネ定数 k のつる巻きばねの一端に、質量mの質点をつけ、摩擦力が無視できる水平な台の上にのせる。バネの他端は台上に固定する。質点をつり合いの位置からばねの方向に距離Lだけ引っ張って静かに放すときの運動を求める



[解]　x軸方向の運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とすると、この式は　$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

これは例題9.1で見たように、次の一般解をもつ:　$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

これをtで微分して速度が得られる: $v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$

初期条件(t=0での位置(x=L)と速度の値(v=0))から $L = A\sin\varphi,\ 0 = \omega A\cos\varphi$

これを解いて $A=L$　$\varphi=\pi/2$ から　$x(t) = L\sin(\omega t + \pi/2) = L\cos\omega t = L\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$

9.2 減衰振動、過減衰、臨界減衰

バネの力と、速度に比例する抵抗力とをうける場合の運動

抵抗力の大きさによって

減衰振動：振幅が時間経過とともに減衰しながら振動

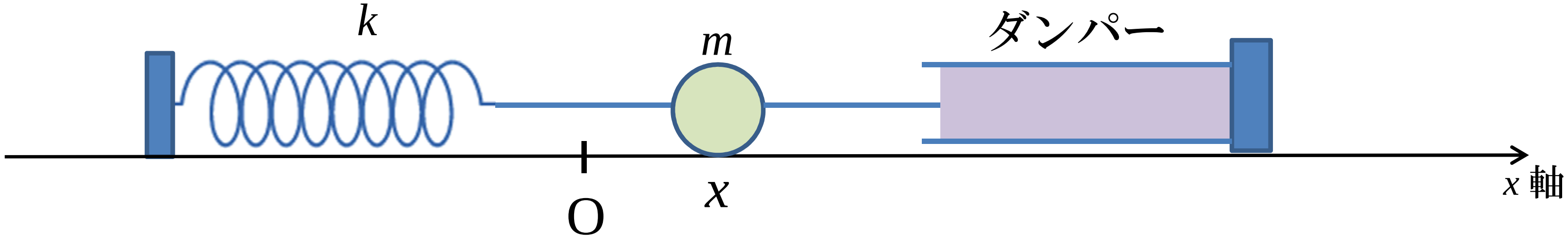
過減衰：振動せずに減衰

臨界減衰：振動を起こさず最も早く静止状態になる

というパタンの運動が出現

例題9.3 減衰振動、過減衰、臨界減衰

図のように、x軸上で、原点Oからの距離xに比例するばねの復元力$-kx$ (kはバネ定数)と、ばねの反対側にある抵抗力を与える装置(ダンパー) から、速度v (= $\frac{dx}{dt}$)に比例する抵抗力 $-av$ (aは正の定数)を受けて運動する質量mの質点の運動を調べよ



[解] 質点の運動方程式は、 $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\frac{dx}{dt}$ (9.2.13)

ここで$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, b = $\frac{a}{2m}$ という定数を考えると(9.2.13)は、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = 0 \qquad (9.2.16)$$

なぜここでe^{-bt}が出てきたか疑問に思った人は「線形２階微分方程式」の解法を勉強してみよう

次に x を e^{-bt} とyとの積 $x = e^{-bt}y$ (9.2.17) と定義すると

$$\frac{dx}{dt} = e^{-bt}(-by + \frac{dy}{dt}) \qquad (9.2.18)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-bt}(b^2y - 2b\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}) \qquad (9.2.19)$$

例題9.3 減衰振動、過減衰、臨界減衰

質点の運動方程式は、 $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\frac{dx}{dt}$ (9.2.13)

ここで$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $b = \frac{a}{2m}$ という定数を考えると(9.2.13)は、 $\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = 0$ (9.2.16)

x を $x = e^{-bt}y$ として、yが満たす式を求める:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-bt}\left(-by + \frac{dy}{dt}\right) \quad (9.2.18) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = e^{-bt}\left(b^2y - 2b\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right) \quad (9.2.19)$$

これらを(9.2.16)に代入: $e^{-bt}\left(\frac{d^2y}{dt^2} + (\omega_0{}^2 - b^2)y\right) = 0$ (9.2.20)

つまり、yが満たす式は: $\frac{d^2y}{dt^2} = -\boxed{(\omega_0{}^2 - b^2)}\, y$ (9.2.21)

以下では、$\boxed{\omega_0{}^2 - b^2}$ の値が 正か負か0かの３つの場合に分けて考える

yの満たす方程式の振る舞いが極端に異なるため

(i) $\omega_0{}^2 - b^2 > 0$　抵抗力が弱い場合

$\omega_0{}^2 - b^2 > 0$ のとき、$\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - b^2}$ とすると、

(9.2.21)　$\dfrac{d^2y}{dt^2} = -(\omega_0{}^2 - b^2)\, y$　は(9.1.2)と同じ単振動型の微分方程式の

形になる：　$\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$　　(9.2.23)

したがって、yの一般解は (9.1.5) から、　$y = A\sin(\omega t + \varphi)$　　(9.2.24)

これから、(9.2.17)　$x = e^{-bt} y$　より(A, φは 初期条件から決まる)、

$$x = \boxed{A\,e^{-bt}}\,\boxed{\sin(\omega t + \varphi)} \qquad (9.2.25)$$

振幅は時間とともに小さくなる　　運動は単振動　　**減衰振動**

(ii) $\omega_0{}^2 - b^2 < 0$ 抵抗力が強い場合

$\omega_0{}^2 - b^2 < 0$ のとき、 $b^2 - \omega_0{}^2 > 0$だから、$\omega' = \sqrt{b^2 - \omega_0{}^2}$ とすると、

(9.2.21) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -(\omega_0{}^2 - b^2)\, y$ は： $\dfrac{d^2y}{dt^2} = (\omega')^2\, y$ (9.2.27)

したがって、yの一般解は 、 $y = C_1\, e^{\omega' t} + C_2\, e^{-\omega' t}$ (9.2.28)

これから、(9.2.17) $x = e^{-bt}\, y$ より(C_1, C_2は 初期条件から決まる)、

$x = \boxed{e^{-bt}}\,\boxed{(C_1\, e^{\omega' t} + C_2\, e^{-\omega' t})}$ (9.2.29)

振幅は時間とともに小さくなる

振動しない

過減衰

(iii) $\omega_0{}^2 - b^2 = 0$　　臨界の場合

$\omega_0{}^2 - b^2 = 0$ のとき、(9.2.21)　$\dfrac{d^2y}{dt^2} = -(\omega_0{}^2 - b^2)\,y$　は

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad (9.2.30)$$

したがって、yの一般解は 、$y(t) = D_1 t + D_2$　　(D_1, D_2 は定数)

これから、(9.2.17)　$x = e^{-bt} y$　より(D_1, D_2は 初期条件から決まる)、

$$x = \boxed{e^{-bt}}\boxed{(D_1 t + D_2)} \qquad (9.2.32)$$

振幅は時間とともに小さくなる　　振動しない　　臨界減衰

減衰振動、過減衰、臨界減衰のまとめ

質点の運動方程式: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\dfrac{dx}{dt}$ (9.2.13)

ここで$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $b = \dfrac{a}{2m}$ とおくと $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2b\dfrac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = 0$ (9.2.16)

$x = e^{-bt}y$ とすると yが満たす式: $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\boxed{(\omega_0{}^2 - b^2)}\,y$ (9.2.21)

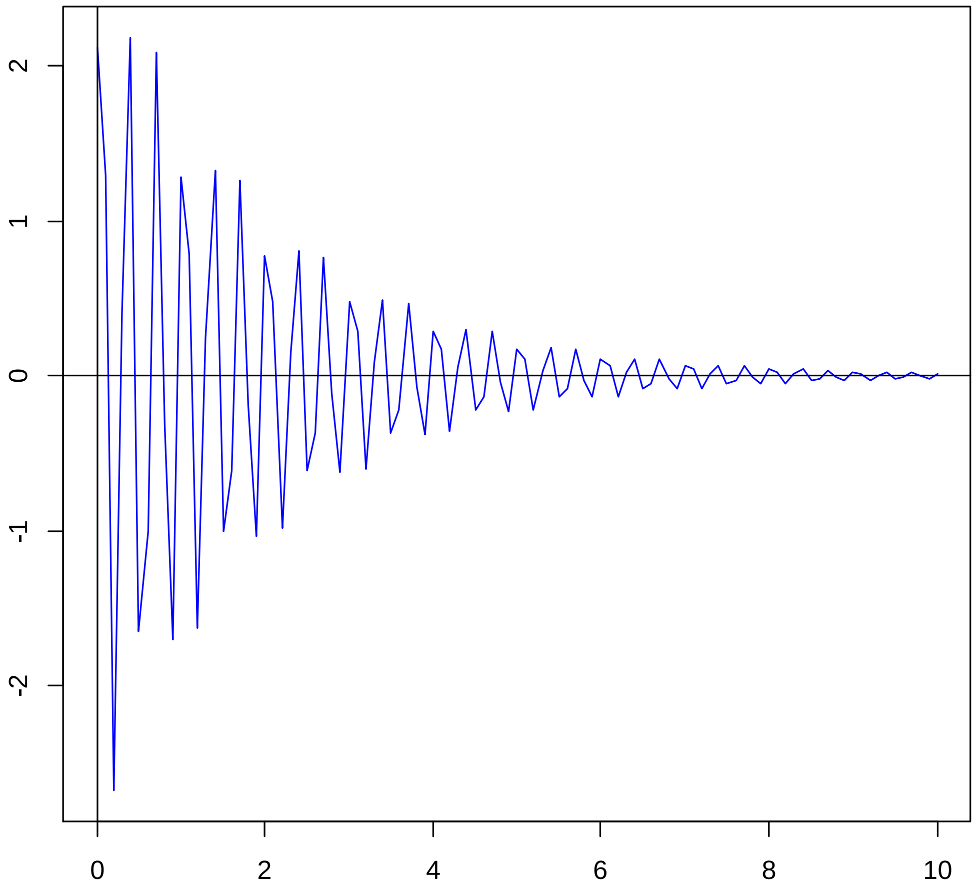
$\boxed{\omega_0{}^2 - b^2} > 0$ の場合の一般解: $x = A\,e^{-bt}\sin(\omega t + \varphi)$ 減衰振動

$\boxed{\omega_0{}^2 - b^2} < 0$ の場合の一般解: $x = e^{-bt}(C_1\,e^{\omega' t} + C_2\,e^{-\omega' t})$ 過減衰

$\boxed{\omega_0{}^2 - b^2} = 0$ の場合の一般解: $x = e^{-bt}(D_1\,t + D_2)$ 臨界減衰

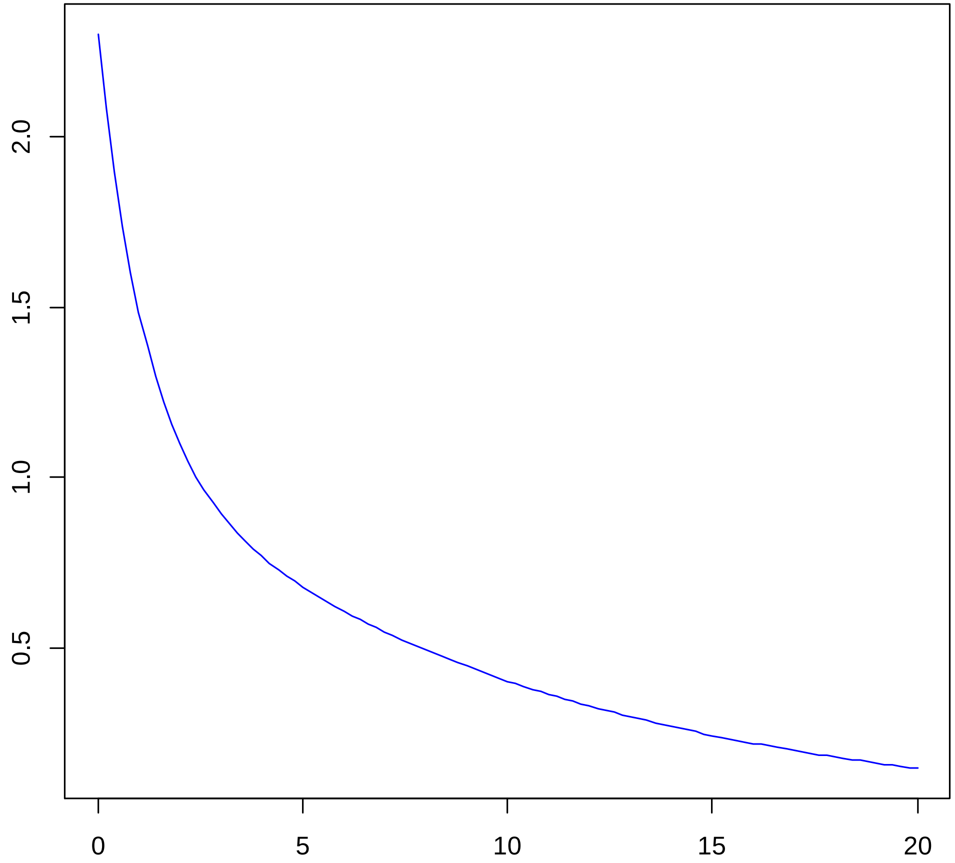
$$x = A\, e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi)$$

減衰振動




```
curve(3.0*exp(-0.5*x)*sin(6.0*pi*x+pi/4),0,10,col="blue")
```

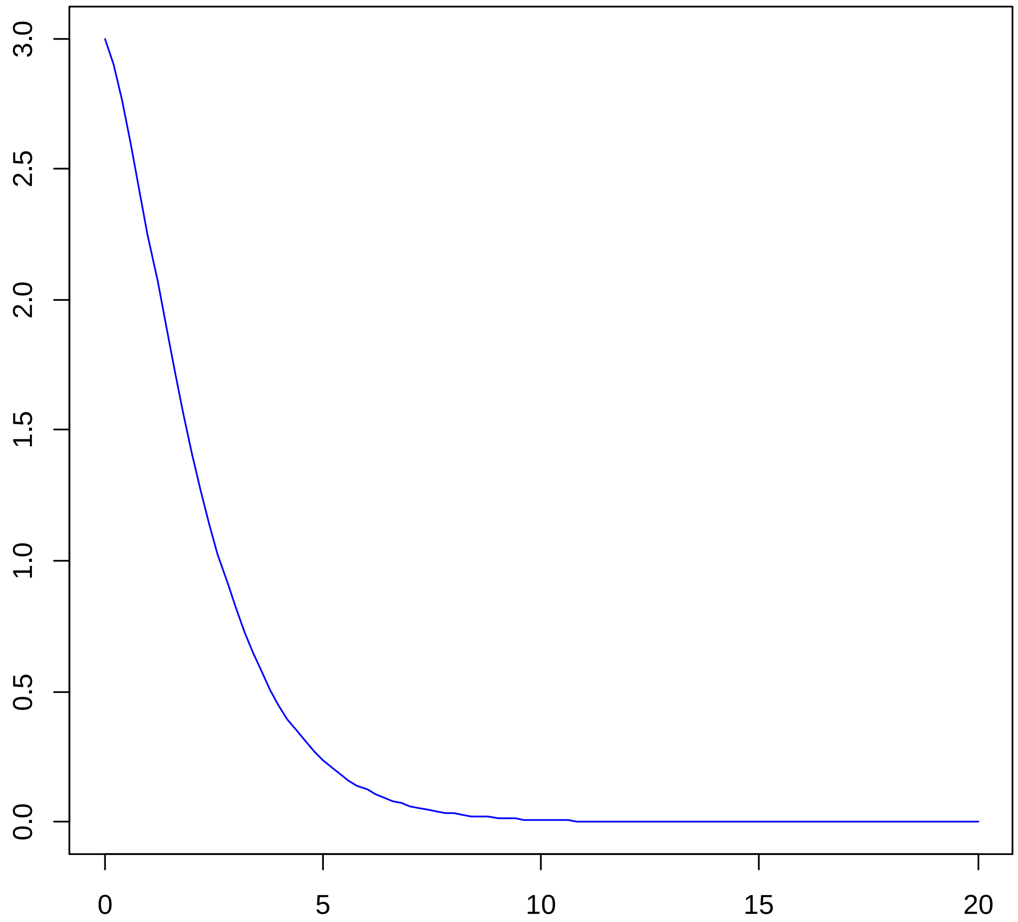
$$x = e^{-bt}\left(C_1 e^{\omega' t} + C_2 e^{-\omega' t}\right)$$ 過減衰



curve(exp(-0.5*x)*(1.1*exp(0.4*x)+1.2*exp(-0.4*x)),0,20,col="blue")

$$x = e^{-bt}\left(D_1 t + D_2\right)$$

臨界減衰



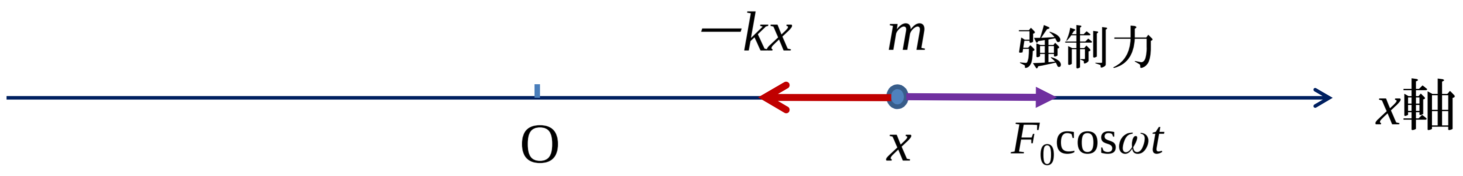
臨界減衰は振動を起こさず最も速く静止状態になる

curve(exp(-0.8*x)*(2.0*x+3.0),0,20,col="blue")

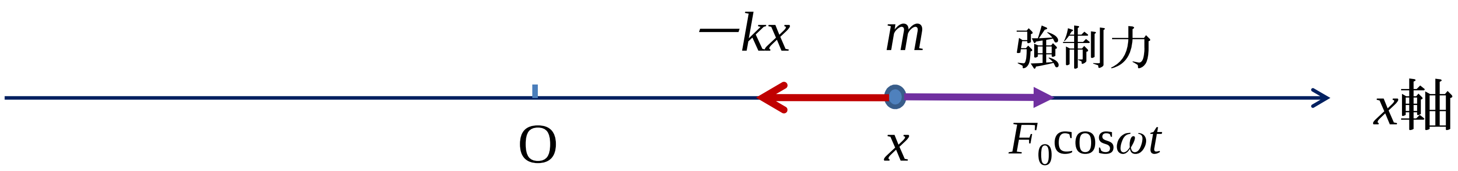
9.3 強制振動

単振動する系に、周期的に変動する外部からの強制力がはたらいた場合の運動

例題9.4 x軸上で、原点Oからの距離xに比例する引力 $-kx$ (kは正の比例定数）を受けて角振動数$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ で単振動する質点の運動を考える。この質点が一定角振動数ωで時間とともに変化する外部からの強制力$F_0\cos\omega t$ を受ける場合の運動を求めよ



強制振動 --- 例題9.4



質点の運動方程式: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0\cos\omega t$ (9.3.33)

教科書p.112(次頁)参照

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$ とすると、 $\dfrac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = f_0\cos\omega t$ (9.3.34)

この微分方程式を満たす一般解は(A, φは初期条件から定まる定数)

$$x = \boxed{A\sin(\omega_0 t + \varphi)} + \boxed{\frac{f_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\cos\omega t} \qquad (9.3.41)$$

固有振動項(=単振動の一般解)

強制振動項

線形２階微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0{}^2x=f_0\cos\omega t$ の一般解

これを解くカギは、この方程式を２つに分けて以下を求める:

(1) $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0{}^2x=0$ の一般解 (これを $x(t)=y(t)$とする) と

(2) $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0{}^2x=f_0\cos\omega t$ の特解(これを $x(t)=z(t)$とする)

これらが求められれば、与式の解は $x(t)=y(t)+z(t)$ と表せる

(1)は、(9.1.5)でみたように, $y(t)=A\sin(\omega_0t+\varphi)$ で与えられる

(2)は、$x(t)=\alpha\cos(\omega t+\beta)$ という形の式が特解となる

実際にこれを当てはめてみると:

$$\alpha(\omega_0{}^2-\omega^2)\cos(\omega t+\beta)=f_0\cos\omega t$$

となるので、$\alpha=\dfrac{f_0}{(\omega_0{}^2-\omega^2)}$ $\beta=0$

よって、与式の解は以下で表される:

$$x(t)=A\sin(\omega_0t+\varphi)+\frac{f_0}{(\omega_0{}^2-\omega^2)}\cos\omega t$$

(9.3.41) $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi) + \dfrac{f_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\cos\omega t$ の検討

初期条件: t=0 で、　x=0,　$\dfrac{dx}{dt} = 0$　とする

t=0 でx=0 から　$A\sin(\varphi) + \dfrac{f_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2} = 0$

t=0で $\dfrac{dx}{dt} = 0$から　$\omega_0 A\cos(\varphi) = 0$

したがって、$A = \dfrac{-f_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2}$，　$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

これを(9.3.41) に代入して、

$$x = \frac{2f_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}t\right) \tag{9.3.46}$$

強制力の角振動数ωと固有振動の角振動数ω_0の関係から、この解の振る舞いを考える…

$$(9.3.46)\quad x = \frac{2f_0}{\omega_0{}^2 - \omega^2}\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)$$

の振る舞い

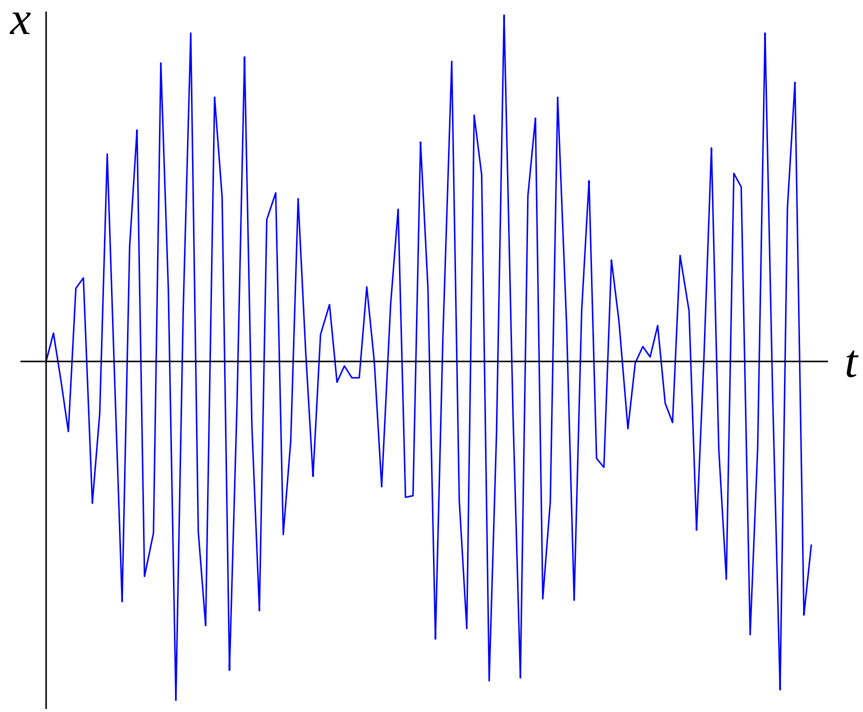
(1) 強制力の角振動数ω が固有振動の角振動数ω_0に近い場合

うなりの現象

角振動数 $\frac{\omega_0+\omega}{2}$ の振動

振幅 $\left(\frac{2f_0}{\omega_0{}^2 - \omega^2}\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)\right)$

が時間経過に対してゆっくり変化



$$(9.3.46)\quad x = \frac{2f_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)$$

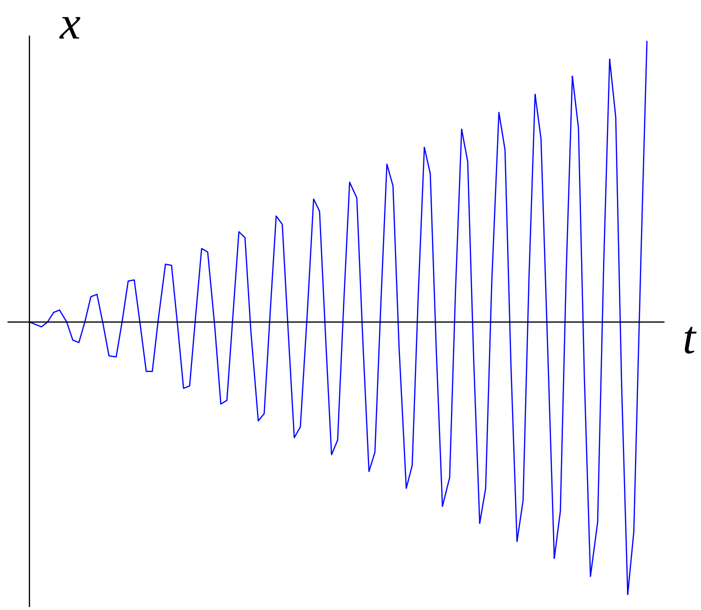
の振る舞い

(2) 強制力の角振動数ω → 固有振動の角振動数ω_0

$$x = \frac{2f_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)$$

$$= \frac{f_0 t}{\omega_0+\omega}\boxed{\left(\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right) / \frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)}\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)$$

$$\to \frac{f_0 t}{2\omega_0}\sin(\omega_0 t) \qquad (9.3.47)$$



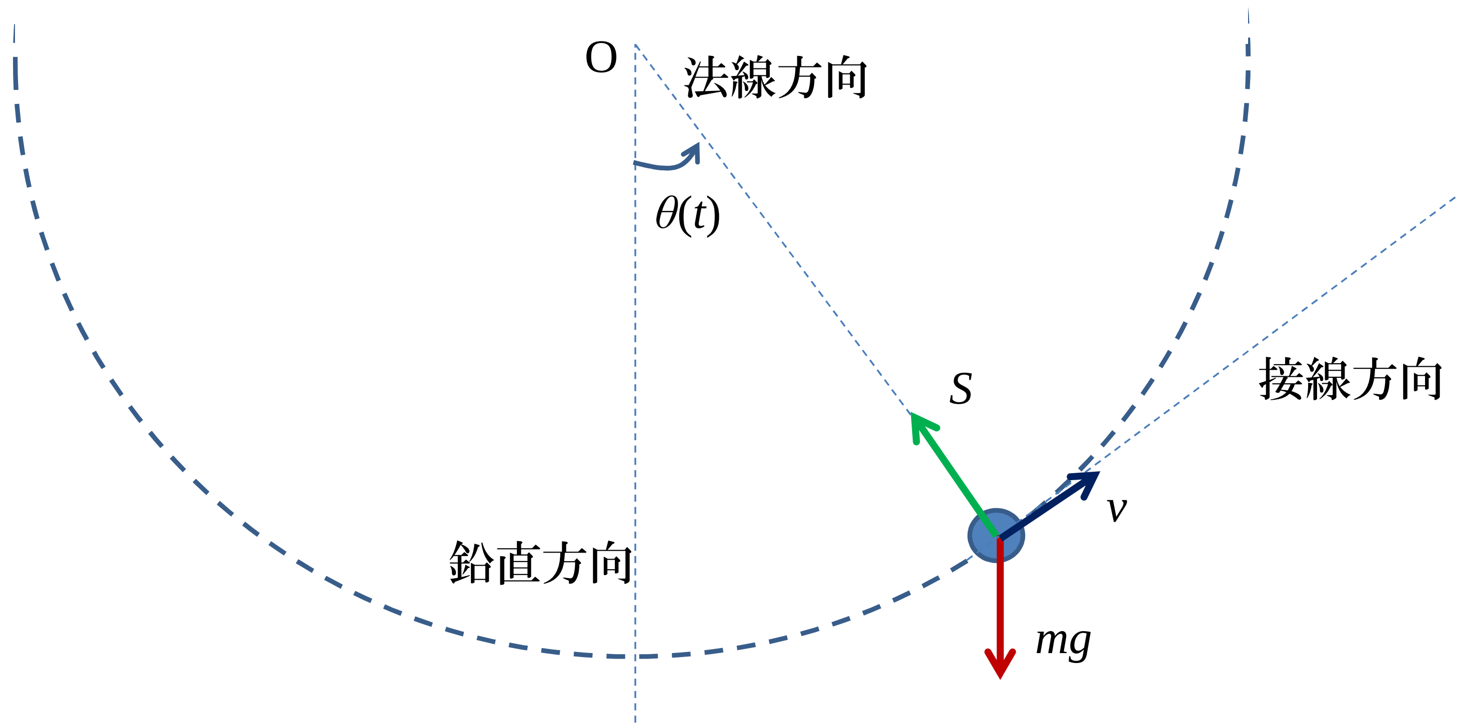
共振、もしくは共鳴現象

これは、時間経過に比例する振幅 $\frac{f_0 t}{2\omega_0}$ を

もつ角振動数ω_0の 振動

9.4 単振り子

例題9.5 天井の１点から長さ l の糸を垂らし、その先に質量mの質点をつけ、１つの鉛直面内で微小振動させる。この単振り子の運動の一般解を求めよ。



単振り子 [解]

質点は半径$r = l$ (一定)の円周上を運動
この円運動は等速ではない。
速さをvとすると、

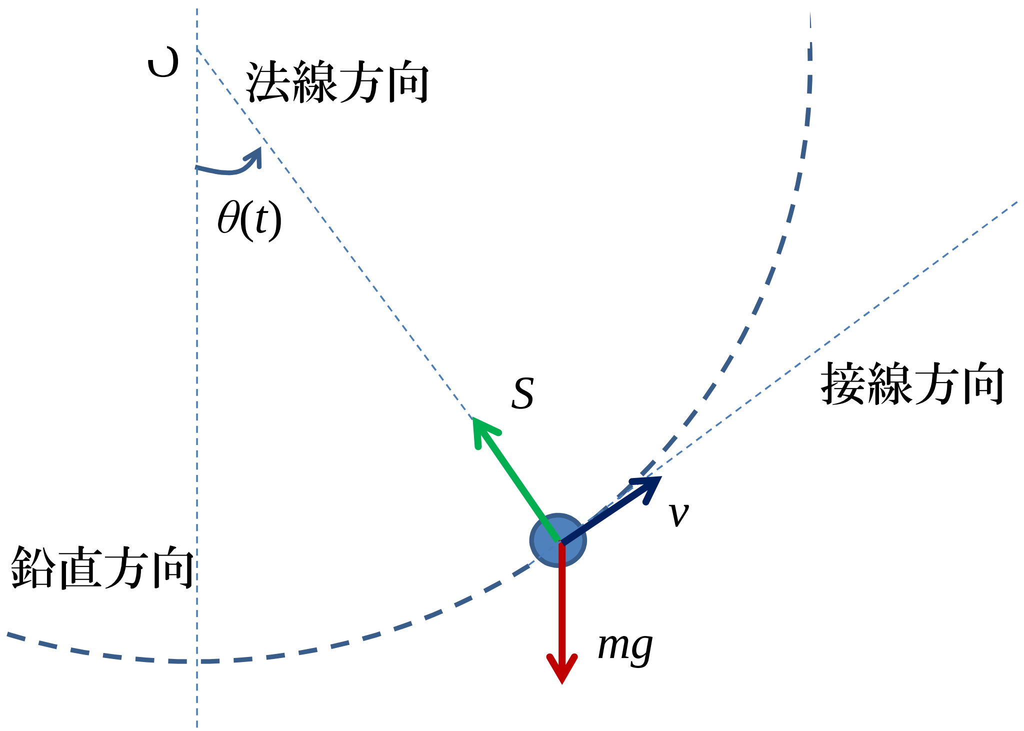
$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta \qquad (9.4.48)$$

また、 $v = l\frac{d\theta}{dt}$ から、上式は

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \qquad (9.4.49)}$$

角θが十分小さい場合は、
$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ から
(9.4.49)は次の単振動型の微分方程式:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \qquad (9.4.51)$$



単振り子（続）

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \qquad (9.4.51)$$

この一般解は、 角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ として　(θ_0とαは初期条件から求まる定数)

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \alpha) \qquad (9.4.52)$$

この振り子の微小振動の周期Tは：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (9.4.53)$$

これが意味すること---振り子の等時性: 周期は糸の長さと重力加速度の大きさだけで決まり、振幅θ_0や質点の質量mに無関係

単振り子（続）

糸の張力の大きさS

円運動の法線方向の運動方程式

$$m\frac{v^2}{l} = S - mg\cos\theta \qquad (9.4.54)$$

を用いて、

$$S = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{l}$$

(ここで、$v = l\frac{d\theta}{dt}$ を用いる)

つまり、張力は、質点の位置とその速さに依存する

参考: $\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t + \alpha)$ から、

$$v = l\frac{d\theta}{dt} = -\theta_0 l\omega\sin(\omega t + \alpha)$$

したがって $S = mg\cos\theta + \theta_0^2\, m\, g\sin^2(\omega t + \alpha)$

$= mg\,(\cos\theta + \theta_0^2\ \sin^2(\omega t + \alpha)\,)$

振幅θ_0 が十分小さければ0とみなせるので、 $S \fallingdotseq mg\cos\theta$

例題9.6 山頂に置かれた振り子時計

山頂に置かれた振り子時計が、地表に置かれた振り子時計の周期よりも遅れることを示せ

解　振り子時計の周期は 公式9.1から $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

つまり(糸の長さlが等しければ)重力加速度の大きさによって決まる

だから、地表と山頂との重力加速度の大きさを比較する

8章(例題8.4)の内容から、万有引力定数G、地球の質量M、地球の半径Rを用いて、　地表での重力加速度の大きさ (g) : $\frac{GM}{R^2}$

高さhの山頂での重力加速度の大きさ(g'): $\frac{GM}{(R+h)^2}$

ゆえに、高さhの山頂の振り子は、$\frac{R+h}{R}$ だけ周期が長い

例えば、高さ1000mの山頂の振り子は地表と比べ１日あたり約14秒遅れる

問27　地球表面で周期2.0sの振り子時計を月においたときの周期を求めよ。ただし、地球と月の半径の比、および質量比は、11:3と 81:1 とする

解　振り子時計の周期は 公式9.1から $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

そこで、地球と月の重力加速度を比較する

8章(例題8.4)の内容から、万有引力定数G、地球の質量M、地球の半径Rを用いて、地球表面での重力加速度の大きさ (g) : $\frac{GM}{R^2}$

$$\text{月の重力加速度の大きさ}(g'): \frac{G\frac{1}{81}M}{(\frac{3}{11}R)^2} = (\frac{11}{27})^2\,\frac{GM}{R^2}$$

したがって重力が地球の$(\frac{11}{27})^2$ ≒0.17倍なので、周期は$\frac{27}{11}$ ≒ 2.45 倍

つまり、 周期 4.9 s