

# 物理学(10)

担当: 白井 英俊

Email: [sirai@sist.chukyo-u.ac.jp](mailto:sirai@sist.chukyo-u.ac.jp)

# 10章 運動座標系と見かけの力

並進運動や回転運動する座標系などの非慣性座標系での運動の法則について

非慣性系で導入される見かけの力について

# 10.1 並進座標系での運動法則

**座標系**: 運動の観測の源、これによって対象物の座標が決まる

**並進運動する座標系**  $O'-x'y'z'$ : 慣性座標系  $O-xyz$  に対して、座標軸  $(x',y',z')$  の方向を一定に保って運動する座標系

慣性の法則が成り立つのが**慣性座標系**(少なくともひとつはあると考える  
---我々の今いる世界の座標系を想定)

それに対して並行移動する座標系が**並進運動する座標系**

**並進運動する**  $\Rightarrow$  回転しない、が重要な違い

力  $F$  を受けて運動する質量  $m$  の質点の運動を、静止している慣性座標系  $O-xyz$  に対して並進運動する座標系  $O'-x'y'z'$  から観測

# 力 $F$ を受けて運動する質量 $m$ の質点の運動

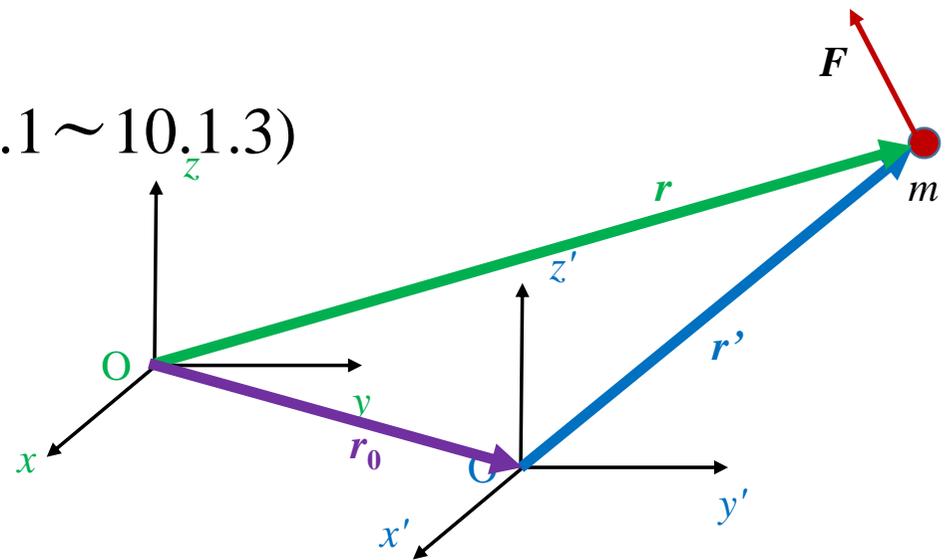
- 慣性座標系 $O$ - $xyz$ から質点の運動を観測したとき、  
位置  $r$ , 速度  $v$ , 加速度  $a$  とする
- 慣性座標系 $O$ - $xyz$ からみて並進運動する座標系 $O'$ - $x'y'z'$ の原点 $O'$ の位置、速度、加速度をそれぞれ $r_0$ ,  $v_0$ ,  $a_0$  とする
- 座標系 $O'$ - $x'y'z'$ から質点の運動を観測したとき  
位置  $r'$ , 速度  $v'$ , 加速度  $a'$

とするとこれらの間の関係(10.1.1~10.1.3)

$$\text{位置 } r' = r - r_0$$

$$\text{速度 } v' = v - v_0$$

$$\text{加速度 } a' = a - a_0$$



# 並進座標系から見た質点の運動の法則

(10.1.3) 加速度  $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$

これから、 $m \mathbf{a}' = m \mathbf{a} - m \mathbf{a}_0$

ここで、慣性座標系で  $F = ma$  が成立していることを使うと、並進座標系  $O'-x'y'z'$  から観測した質点の加速度  $\mathbf{a}'$  について:

$$m \mathbf{a}' = F - m \mathbf{a}_0 \quad (10.1.5)$$

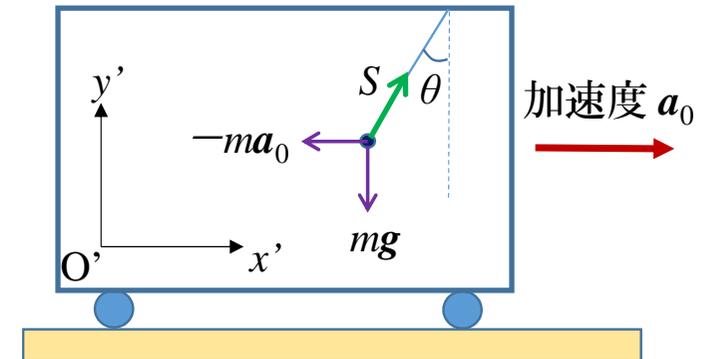
公式10.1 並進座標系での運動法則

つまり、並進座標系から質点の運動を観測すると、質点にはたらく実際の力  $F$  以外に、並進座標系の加速度と反対向きにはたらく力  $-m \mathbf{a}_0$  が加わったような現象が観測される

見かけの力、または慣性力

## 例題10.1 電車の加速度

一定加速度  $a_0$  で加速中の電車の中で、天井に吊るされた質量  $m$  の質点の振り子が、鉛直方向から一定角  $\theta$  だけ傾いた状態であった。この時の電車の加速度の大きさと糸の張力の大きさを求めよ。ただし重力加速度の大きさを  $g$  とする。



**[解]** 電車の外の座標系(慣性座標系)に対して、電車の中の、電車とともに運動する並進座標系  $O'-x'y'$  からこの質点の運動を見る。すると、質点は、糸の張力  $S$  と、重力  $mg$ 、それに見かけの力  $-ma_0$  がつりあって静止しているようにみえる。ここで、この座標系における加速度  $a' = 0$  である。なお、 $a_0$  は慣性座標系から見た電車の加速度。

**注:** 教科書では「重量」とあるが本講義では「重力」とする(『重量』は重力の大きさなので)

## 例題10.1 電車の加速度(続)

[解] 電車の外の座標系(慣性座標系)に対して、電車の中の、電車とともに運動する並進座標系  $O'-x'y'$  からこの質点の運動を見る。すると、質点は、糸の張力  $S$  と、重力  $mg$ 、それに見かけの力  $-ma_0$  がつりあって静止しているように見える。ここでこの座標系における加速度  $a' = 0$  である。そのつりあいの関係を図にしたのが右図(図10.3)

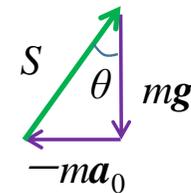
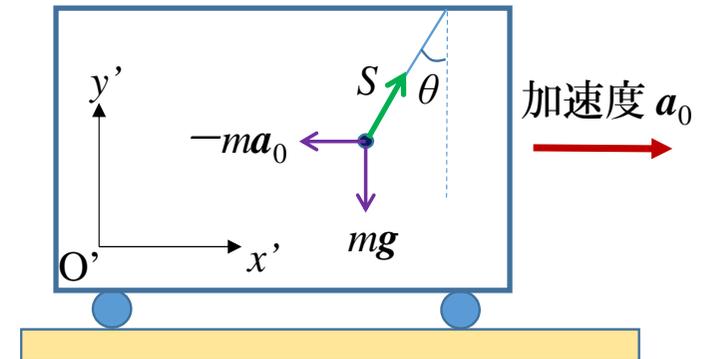
この3つの力は閉じた直角三角形を構成するので、

$$\tan \theta = \frac{ma_0}{mg} = \frac{a_0}{g}$$

$$\cos \theta = \frac{mg}{S}$$

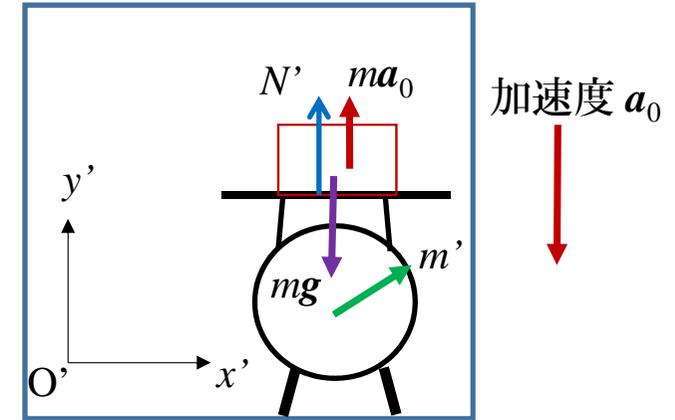
この結果から  $a_0 = g \tan \theta$

$$S = \frac{mg}{\cos \theta}$$



## 例題10.2 エレベータ内での体重測定

鉛直下向きの一様加速度の大きさ $a_0$ で下降中のエレベータの中で、質量 $m$ の人の体重を台秤で測定するといくらになるか。ただし重力加速度の大きさを $g$ とする。

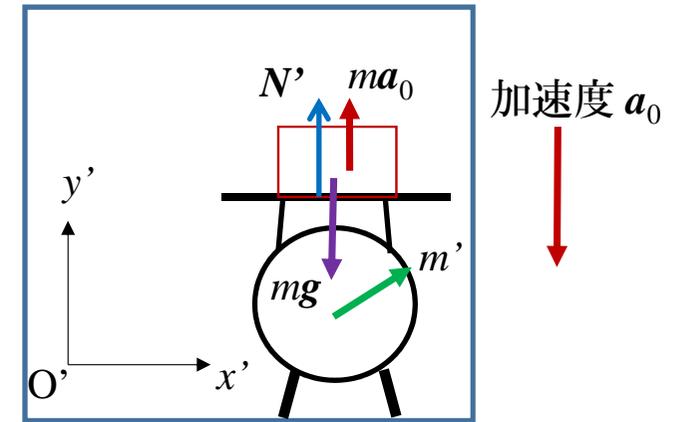


**[解]** エレベータの外の座標系(慣性座標系)に対して、エレベータの中の、エレベータとともに運動する並進座標系  $O'-x'y'$  から、この台秤の天板に置かれた物体の運動を見る。すると、この物体は、天板から受ける垂直抗力  $N'$  と、重力  $mg$ 、それに見かけの力  $-ma_0$  がつりあって静止しているようにみえる。つまりこの座標系における加速度  $a' = 0$  である。ここで、 $a_0$  は慣性座標系から見たエレベータの加速度。

**注:** 教科書では「重量」とあるが本講義では「重力」とする (『重量』は重力の大きさなので)

## 例題10.2 エレベータ内での体重測定(続)

[解] エレベータの外の座標系(慣性座標系)に対して、エレベータの中の、エレベータとともに運動する並進座標系  $O'-x'y'$  から、この台秤の天板に置かれた物体の運動を見る。すると、この物体は、天板から受ける垂直抗力  $N'$  と、重力  $mg$ 、それに見かけの力  $-ma_0$  がつりあって静止しているように見える。つまりこの座標系における加速度  $a' = 0$  である。ここで、 $a_0$  は慣性座標系から見たエレベータの加速度。



つりあう3つの力の関係から、物体が天板から受ける垂直抗力の大きさ  $N'$  について、 $N' = mg - ma_0$  ここで、このときの台秤の指す値を  $m'$  とする。慣性座標系で測ると、天板から受ける垂直抗力の大きさ  $N = mg$  で、台秤の指す値は  $m$  。そして台秤の針は天板にかかる力に比例

ゆえに、 $\frac{N'}{N} = \frac{m'}{m}$  が成り立つ。

$$\text{これから、 } m' = \frac{N'm}{N} = \frac{m(mg - ma_0)}{mg} = \frac{g - a_0}{g}m$$

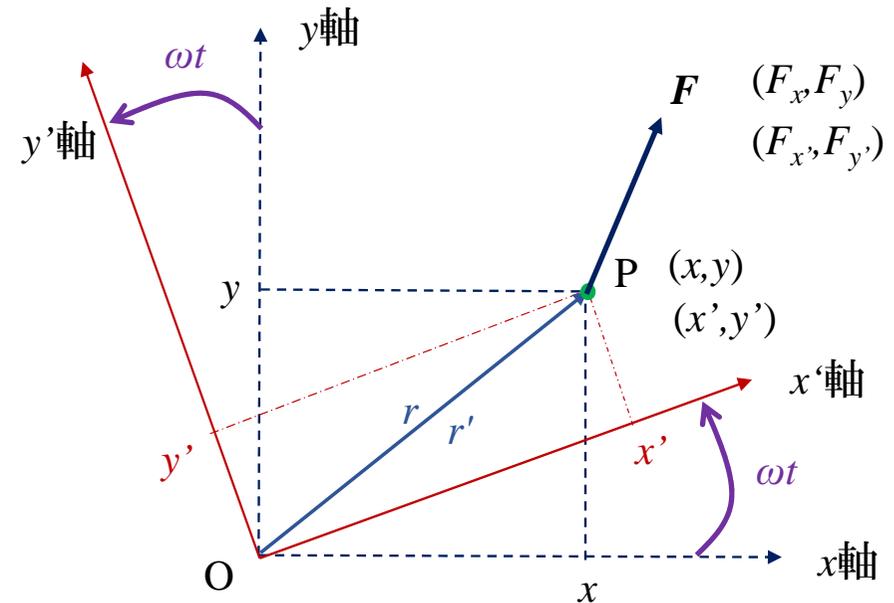
# 10.2 回転座標系での運動法則

注: 10.2節と10.3節はやや難しい内容なので、初めは軽い理解でよい

静止している慣性座標系  $O-xy$  に対して、原点を共有し、一定角速度  $\omega$  で回転する2次元回転座標系  $O-x'y'$  を考える

$O-x'y'$  からみた質点の位置を  $r' = (x', y')$  として、質点の運動の法則---  
加速度  $a' = (a_{x'}, a_{y'})$  と作用している力  $F = (F_{x'}, F_{y'})$  との関係式---を求める

慣性系  $O-xy$  からみて、 $P$  点にいる質点位置を  $r = (x, y)$ 、作用している力を  $F = (F_x, F_y)$  とする  
ここで、 $r = r'$  (原点を共有しているため)



# 10.2 回転座標系での運動法則(位置成分)

位置の成分の関係:

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \quad (10.2.15)$$

$$y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \quad (10.2.16)$$

解説:  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

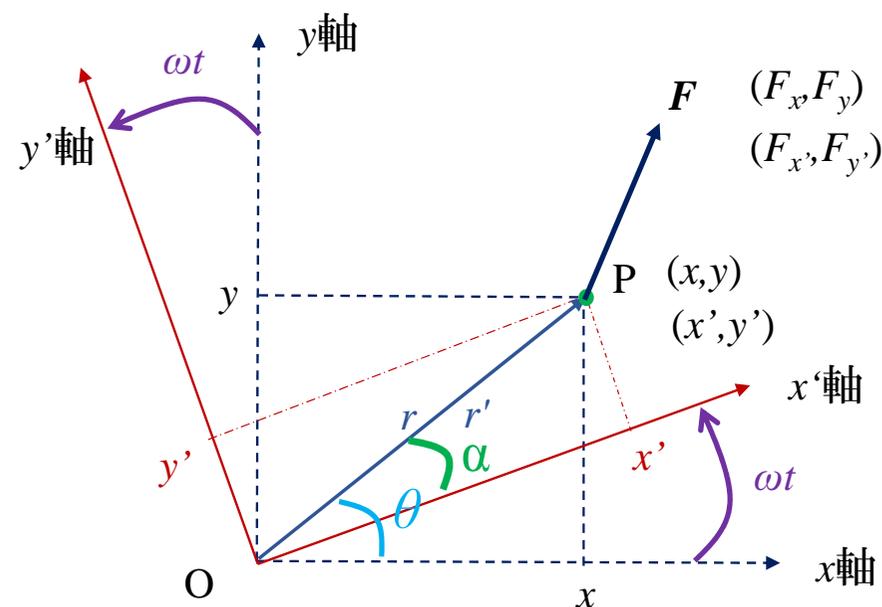
$(x', y') = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$  と仮定

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = r \cos(\alpha + \omega t) \\ &= r (\cos \alpha \cos \omega t - \sin \alpha \sin \omega t) \\ &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \\ y &= r \sin \theta = r \sin(\alpha + \omega t) \\ &= r (\sin \alpha \cos \omega t + \cos \alpha \sin \omega t) \\ &= y' \cos \omega t + x' \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

ゆえに、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



## 10.2 回転座標系での運動法則(力の成分)

同様にして

$$F_x = F_{x'} \cos \omega t - F_{y'} \sin \omega t \quad (10.2.17)$$

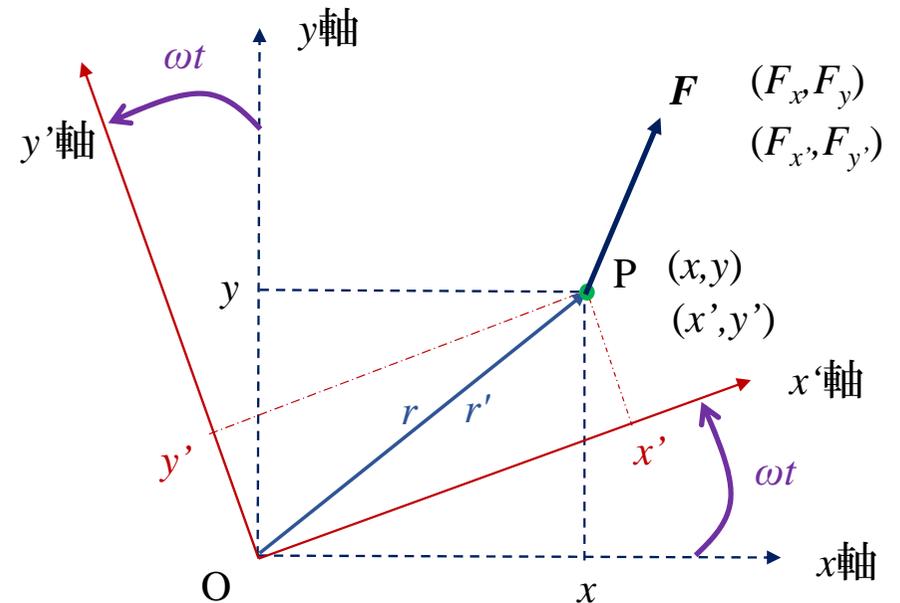
$$F_y = F_{x'} \sin \omega t + F_{y'} \cos \omega t \quad (10.2.18)$$

行列で表すと:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{x'} \\ F_{y'} \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} F_{x'} \\ F_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$



## 10.2 回転座標系での運動法則(運動方程式)

慣性座標系O-xyで次が成立:  $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x$        $m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y$

(10.2.15), (10.2.16)を微分:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} \cos \omega t - x' \omega \sin \omega t - \left( \frac{dy'}{dt} \sin \omega t + y' \omega \cos \omega t \right)$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx'}{dt} \sin \omega t + x' \omega \cos \omega t + \left( \frac{dy'}{dt} \cos \omega t - y' \omega \sin \omega t \right)$$

もう一回微分

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} \cos \omega t - \frac{dx'}{dt} \omega \sin \omega t - \left( \frac{dx'}{dt} \omega \sin \omega t + x' \omega^2 \cos \omega t \right) -$$
$$\left( \left( \frac{d^2y'}{dt^2} \sin \omega t + \frac{dy'}{dt} \omega \cos \omega t \right) + \left( \frac{dy'}{dt} \omega \cos \omega t - y' \omega^2 \sin \omega t \right) \right)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} \sin \omega t + \frac{dx'}{dt} \omega \cos \omega t + \left( \frac{dx'}{dt} \omega \cos \omega t - x' \omega^2 \sin \omega t \right) +$$
$$\left( \left( \frac{d^2y'}{dt^2} \cos \omega t - \frac{dy'}{dt} \omega \sin \omega t \right) - \left( \frac{dy'}{dt} \omega \sin \omega t - y' \omega^2 \cos \omega t \right) \right)$$

## 10.2 回転座標系での運動法則(運動方程式) 続

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x'}{dt^2} \cos \omega t - \frac{dx'}{dt} \omega \sin \omega t - \left( \frac{dx'}{dt} \omega \sin \omega t + x' \omega^2 \cos \omega t \right) - \left( \left( \frac{d^2y'}{dt^2} \sin \omega t + \frac{dy'}{dt} \omega \cos \omega t \right) + \left( \frac{dy'}{dt} \omega \cos \omega t - y' \omega^2 \sin \omega t \right) \right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2x'}{dt^2} \sin \omega t + \frac{dx'}{dt} \omega \cos \omega t + \left( \frac{dx'}{dt} \omega \cos \omega t - x' \omega^2 \sin \omega t \right) + \left( \left( \frac{d^2y'}{dt^2} \cos \omega t - \frac{dy'}{dt} \omega \sin \omega t \right) - \left( \frac{dy'}{dt} \omega \sin \omega t - y' \omega^2 \cos \omega t \right) \right)\end{aligned}$$

これから

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cos \omega t + \frac{d^2y}{dt^2} \sin \omega t = \frac{d^2x'}{dt^2} - 2 \frac{dy'}{dt} \omega - x' \omega^2 \quad (10.2.21)$$

$$- \frac{d^2x}{dt^2} \sin \omega t + \frac{d^2y}{dt^2} \cos \omega t = \frac{d^2y'}{dt^2} + 2 \frac{dx'}{dt} \omega - y' \omega^2 \quad (10.2.22)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \cos \omega t + m \frac{d^2y}{dt^2} \sin \omega t = m \frac{d^2x'}{dt^2} - 2m \frac{dy'}{dt} \omega - m x' \omega^2$$

$$F_{x'} = F_x \cos \omega t + F_y \sin \omega t = m a_{x'} - 2m v_{y'} \omega - m \omega^2 x'$$

これより、 $ma_{x'} = F_x + 2mv_{y'}\omega + m\omega^2x'$  (10.2.23) が得られる

同様にして

$ma_{y'} = F_y - 2mv_{x'}\omega + m\omega^2y'$  (10.2.24) が得られる

公式10.2 回転座標系での運動の法則

## 10.2 回転座標系での運動法則(運動方程式) 続

$$ma_{x'} = F_{x'} + 2mv_{y'}\omega + m\omega^2x' \quad (10.2.23)$$

$$ma_{y'} = F_{y'} - 2mv_{x'}\omega + m\omega^2y' \quad (10.2.24)$$

$F_{\text{実際の力}} = (F_{x'}, F_{y'}) + \text{見かけの力}$

$$F_{\text{コリオリ}} = (2mv_{y'}\omega, -2mv_{x'}\omega)$$

$$F_{\text{遠心力}} = (m\omega^2x', m\omega^2y')$$

遠心力：回転の中心Oから遠ざける向きにはたらく力

コリオリの力：速度が0でないときに現れる、速度方向に垂直に働く

$\omega > 0$  (反時計回り)なら進行方向から右、 $\omega < 0$ なら左に軌道をそらすようはたらく

## 10.3 コリオリの力の効果

地球の自転によるコリオリの力の効果の例:

- 台風の渦巻き

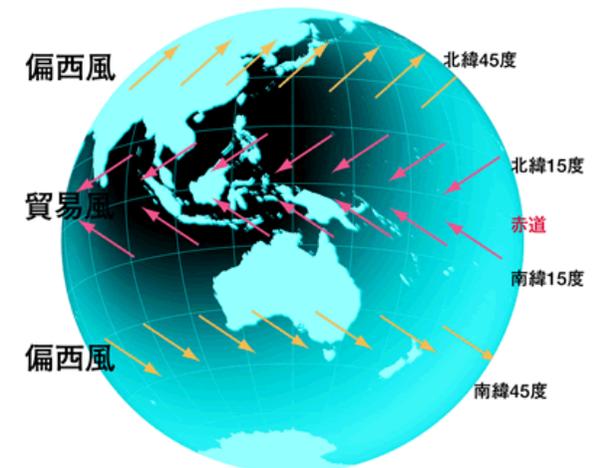
北半球の台風は左巻き、南半球では右巻き

- フーコーの振り子

振動するおもりに対し、北半球では進行方向に対して垂直  
右向き、南半球では垂直左向きにはたらく⇒北半球では、  
振り子の振動面が右回転

- 貿易風：中緯度高圧帯から赤道低圧帯に向かう東よりの風

- 偏西風：中緯度高圧帯から高緯度低圧帯に向かう西よりの風



[http://www.tohoku-epco.co.jp/new\\_naze/nazenavi/dotten12/01/05.html](http://www.tohoku-epco.co.jp/new_naze/nazenavi/dotten12/01/05.html) から引用