

物理学(12)

担当: 白井 英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

12章 力学的エネルギー保存則

「力学的エネルギー保存則」と
それが成り立つための条件について

力学的エネルギー保存則の応用

12.1 力学的エネルギー保存則

力学的エネルギー = 運動エネルギー($\frac{1}{2}mv^2$)と位置エネルギー($U(x)$)の和

公式12.1 力学的エネルギー保存則:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E (=一定)$$

Eの値は、初期条件にて決定できる

(12.1.3)

力Fが保存力で、位置エネルギー(ポテンシャル)U(x)が定義されている場合

はじめと終わりのポテンシャルの差

位置 x_1 から x_2 までに力F(x)がした仕事 $W = U(x_1) - U(x_2)$

これを(11.2.14)「運動エネルギーの差が力がした仕事に等しい」と

いう $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$ に代入して

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2) \quad (12.1.2)$$

例題12.1 鉛直投げ上げ時の最高点の高さ

質量 m の質点を地上より鉛直上方に初速 v_0 で投げあげた時、質点が到達する最高点の高さ H を求めよ。ただし、重力加速度の大きさを g とする。

[別解] 公式 $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ を用いた解法

$v = 0, a = g, x - x_0 = H$ から、

$$H = \frac{v_0^2}{2g}$$

一般の空間運動の場合

物体が力 F を受け、空間内を運動する場合

物体にはたらく合力する仕事 W が運動経路によらない場合は
力学的エネルギー保存則がなりたつ

力 F による仕事(積分の経路は C とする)

$$W = \int_{P,C}^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i \quad (11.1.11)$$

仕事 W が経路によらない値なら、 (12.1.4)

$$\int_{P_1,C}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_Q^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \left(- \int_Q^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right) = U(P_1) - U(P_2)$$

一般の空間運動の場合

(12.1.4)式から、力が保存力なら、

$$\text{力}\mathbf{F}\text{のする仕事} = \int_{P_1, C}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(P_1) - U(P_2)$$

$$(11.2.18) \quad \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{P_1, C}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

これらから:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U(P_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(P_2) \quad (12.1.5)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(\mathbf{r}) = E (= \text{一定}) \quad (12.1.6)$$

面の垂直抗力など、変位に垂直に働く力は仕事をしないのでこの式に寄与しない⇒このような力がはたらいても、力学的エネルギー保存則は成立

力学的エネルギー保存則が成立しない場合

摩擦力や流体の抵抗などが作用している場合

これらは**非保存力**なので、力学的エネルギー保存則は成立しない

場の力ではない = 質点の位置だけでは力の大きさが決まらない

摩擦力を例に用いた説明:

質量 m の質点が粗い水平面上で初速 v_0 で走り出し、距離 l だけ走って静止した場合。運動摩擦力の大きさを $f (= \mu' mg)$ とすると

$$\frac{1}{2} m 0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -f l = -\mu' m g l < 0$$

質点が初めに持っていた運動エネルギーが摩擦力がした仕事として失われた

力学的エネルギーの変化量が、非保存力がした仕事に等しい

12.2 力学的エネルギー保存則の応用

力が**保存力**なら、力学的エネルギー保存則が成り立つ

質点の運動を完全に知るには、位置の変数や抗力など最低でも 3 個以上の変数の値を定める必要

したがって、エネルギー保存則だけでは決定できない

力学的エネルギー保存則は、未知数が 1 つで、その値を知りたい場合に有効

例題12.2 単振動の運動範囲

フックの力を受けた質点の運動を、力学的エネルギー保存則を用いて調べよ

[解] 弾性力は保存力であるため、力学的エネルギー保存則が成り立つ。
質点の質量を m 、ばねのバネ定数を k 、ばねが自然長の位置を基準点にとる。
質点が位置 x にあるときの位置エネルギーは $\frac{1}{2}kx^2$ で表されるから、そのときの力学的エネルギーは(12.1.3) より、

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \text{ (一定)} \quad \text{ゆえに、} \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - \frac{1}{2}kx^2 \quad (12.2.10)$$

ここで $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \geq 0$ であるから、 $E - \frac{1}{2}kx^2 \geq 0$

$$\text{ここから} x \text{の範囲は} \quad -\sqrt{\frac{2E}{k}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad (12.2.11)$$

例題12.2 単振動の運動範囲(続)

前の議論から、 $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - \frac{1}{2}kx^2$ (12.2.10)

これから、 $\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{1}{m} (2E - kx^2)} = \pm \sqrt{\frac{k}{m} \left(\frac{2E}{k} - x^2\right)}$

ここで、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ として書き換えると、 $\pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}} = \omega dt$

積分公式: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\cos^{-1} \frac{x}{|a|} + C$ (Cは積分定数) を使う

$\mp \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{k}}} = \omega t + \varphi$ (φ は定数)

ゆえに、 $\frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{k}}} = \cos(\omega t + \varphi)$ これより $x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos(\omega t + \varphi)$

(9.1.5)式と実質的に同じ結果となる

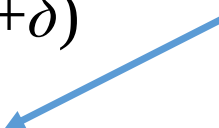
初期条件により定まる定数

例題12.2に関連して

単振動 $x = A \cos(\omega t + \delta)$ (ただし $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$) の

運動エネルギー K , 位置エネルギー U , 力学的エネルギー E

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

$$k = m \omega^2$$


$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 (\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)) = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

すなわち単振動の力学的エネルギーは一定で、質量(m)と振幅(A)の2乗、角振動数(ω)の2乗にそれぞれ比例

例題12.3 脱出速度

地上からロケットを打ち上げて、地球の引力圏から脱出させるために必要な最小の速度 v_0 を求めよ

[解] 地球の質量を M , 半径を R , ロケットの質量を m とする。
ロケットが地球中心から距離 r の点 P に来たときの速度を v とすると、
力学的エネルギー保存則より、 $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = E$ (一定)

ここで E の値は初期条件 $v = v_0$ (打ち上げ時の速度)、 $r = R$ (地上からの打ち上げ)によって次のように決まる: $E = \frac{1}{2}m v_0^2 - G\frac{Mm}{R}$ (12.2.18)

一方、地球の引力圏から脱出できれば、ロケットはその速度で無限遠点まで到達できるはずである。無限遠点において、速度を v_∞ とする。位置エネルギーは $G\frac{Mm}{R} \rightarrow 0$ となるので、 $E = \frac{1}{2}m v_\infty^2 \geq 0$ (12.2.19)

例題12.3 脱出速度(続)

前の議論から

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{Mm}{R} \quad (12.2.18)$$

$$E = \frac{1}{2} m v_\infty^2 \geq 0 \quad (12.2.19)$$

$$\text{これから、} \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{Mm}{R} \geq 0$$

$$\text{ゆえに、} \frac{1}{2} m v_0^2 \geq G \frac{Mm}{R} \qquad \text{これから } v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

ここで $\sqrt{\frac{GM}{R^2}} = g$ ($=9.8 \text{ m/s}^2$)、 $R = 6400 \text{ km}$ を用いると、 $v_0 \geq \sqrt{2gR}$ から、

$$v_0 \geq 1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$$

有効数字2桁として11 km/s