# 物理学(13)

担当: 白井　英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

# 13章　運動量と角運動量

運動量、力積、角運動量について説明

運動量と力積の関係式、
　　角運動量保存則、
　　中心力による運動について学ぶ

# 13.1 運動量と運動量変化則

英語で書けば momentum --- スポーツで使われる「モーメンタム」と同じ語

運動量　$p=(p_x, p_y, p_z) = m\boldsymbol{v}$

速度$\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$で運動する質量$m$の質点の「いきおい」を表す物理量

運動量の３つの成分:

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

単位は、kg･m/s

速度が小さくとも質量が大きければ大きな「いきおい」を持つ

# 問34

直線上を速さ10m/sで走る質量4000kgのトラックがある。質量1000kgの自動車がこれと同じ「いきおい」をもつために必要な速さを求めよ。

[解]　このトラックの運動量の大きさ$p$は 運動量の定義より

$$p = 4000 \times 10 = 4.0 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

1000kgの質量の自動車がこれと同じ運動量を持つために必要な速さを$v$ とすると、

$$v = 4.0 \times 10^4 / 1000 = 4.0 \times 10 \text{ m/s}$$

# 運動量変化則

力$\boldsymbol{F}$を受けて運動する質点の運動方程式($\boldsymbol{v}$は速度)

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

を運動量$\boldsymbol{p}$ (=$m\boldsymbol{v}$)を用いて書き換える: ($m$は定数なので)

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \boxed{\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}} = \boxed{\boldsymbol{F}} \qquad (13.1.3)$$

運動量変化則

運動量の時間変化率は、質点にはたらいている力に等しい

# 13.2 運動量原理: 運動量の変化と力積の関係

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \qquad (13.1.3)$$

この両辺を時刻$t=t_1$から$t=t_2$まで$t$で積分する:

左辺: $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\, dt = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1)$

右辺: $\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt$ ---- 時間$\Delta t=t_2 - t_1$に対する力の力積

単位は N･s

(13.1.3)を書き直すと

$$\boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt \qquad (13.2.4)$$

運動量原理　運動量の変化量は、その間にはたらいた力の力積に等しい

# 平均の力

力$\boldsymbol{F}$が一定の場合：

$$力積=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}dt=\boldsymbol{F}(t_2-t_1)$$

力$\boldsymbol{F}$が時刻とともに変化する場合:

$$力積=\langle\boldsymbol{F}\rangle\times(t_2-t_1)$$

とする。ここで $\langle\boldsymbol{F}\rangle=\dfrac{1}{t_2-t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}dt$ 　平均の力

これを使った運動量原理 (公式13.1)

$$\boldsymbol{p}(t_2)-\boldsymbol{p}(t_1)=\langle\boldsymbol{F}\rangle\times(t_2-t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}dt \qquad (13.2.8)$$

# 例題13.1 平均の力

速さ$v$ = 40 m/s で飛んできた質量$m$=0.10 kgのボールをバットで一撃して、飛んできた方向に同じ速さ$v$で打ち返した。ボールとバットの接触時間を $\Delta t$=0.20 sとして、バットがボールに与えた平均の力の大きさを求めよ。

[解]　飛んできたボールの運動量$p$は、初めに飛んできた方向を正とすると、

$$p = mv = 40 \times 0.10 = 4.0\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

打ち返されたボールの運動量$p'$は、飛んできた方向と逆向きなので、

$$p' = -mv = -40 \times 0.10 = -4.0\ \mathrm{kg \cdot m/s}$$

平均の力の大きさを$\langle F \rangle$とすると、運動量原理から

$$p - p' = 4.0 - (-4.0) = 8.0 = \langle F \rangle \times 0.20$$

これから、$\langle F \rangle = 40\ \mathrm{N}$

# 13.3 角運動量と角運動量変化則

角運動量：質点がもつ回転運動の「いきおい」を表す物理量

点Oを原点として２次元直交座標系 O-$xy$をとり、$xy$平面内での点Oの周りの回転運動(z軸周りの回転)を考える

z軸周りの角運動量$L$ : z軸周りの運動量 $\boldsymbol{p} = (p_\mathrm{x}, p_\mathrm{y}) = m\boldsymbol{v} = (mv_\mathrm{x}, mv_\mathrm{y})$ のモーメントとして定義：

$$L = hp = hmv = xp_\mathrm{y} - yp_\mathrm{x} = xmv_\mathrm{y} - ymv_\mathrm{x} \qquad (13.3.10)$$

$h$ : 運動量の方向とz軸との距離

角運動量の単位は kg· m$^2$/s

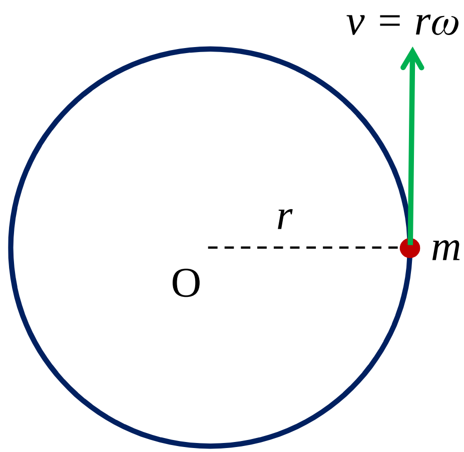
角運動量$L$は力のモーメントと同様に反時計回りの量が正

# 例題13.2 円運動の角運動量

$xy$平面内において一定半径$r$の円周上を角速度ωで円運動する質量$m$の質点がある。円の中心点Oの周りの角運動量を求めよ。

[解]　(13.3.10)式から、角運動量$L$は運動量$p$、運動量の方向と中心点Oとの距離$h$を用いて

$$L = hp$$




運動量$\boldsymbol{p}$を求める。円運動しているので、質点の速度$\boldsymbol{v}$の方向は円の接線方向、大きさは$r\omega$であるから、運動量の大きさ$p = mv = mr\omega$

また、図より $h = r$ であるから、$L = hp = rmv = mr^2\omega$　　(13.3.11)

点Oのまわりの慣性モーメント $I \equiv mr^2$ により、$L = I\omega$　と書ける

# 問35　角運動量を求める

半径80mの円周上を速さ 50 m/s で動く質量1000 kgの質点がある。この質点の円の中心点のまわりの角運動量を求めよ。

[解]　例題13.2 の類題である。

　$r$ = 80 m、$v$ = 50 m/s、$m$ = 1000 kg として角運動量を求める

(13.3.11) 式から、$L = rmv = 80 \times 1000 \times 50 = 4.0 \times 10^{6}\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$

# 問36　慣性モーメントと運動エネルギー

半径$r$の円周上を動く質点の運動エネルギーを角速度$\omega$と円の中心点の周りの慣性モーメント$I$を用いて表わせ

[解]　例題13.2から、半径$r$の円周上を動く質点の速さを$v$とすると$v=r\omega$ と表される

したがって、質点の運動エネルギーは　$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$

ここで中心点周りの慣性モーメント $I = mr^2$ であるから、

質点の運動エネルギーは慣性モーメント $I$ を用いて

$\frac{1}{2}I\omega^2$ と表すことができる

運動エネルギーの式に似ていることに注意
慣性モーメントは回転における質量に相当
---「回転のしにくさ」を表す

# 角運動量変化則

成分が($F_x$, $F_y$)で表される力$\boldsymbol{F}$を受けて、$xy$平面上を運動する質量$m$の質点について、O点のまわり($z$軸のまわり)の角運動量$L$の時間的変化率を求める

質点の運動方程式： $m\dfrac{dv_x}{dt} = F_x$ $m\dfrac{dv_y}{dt} = F_y$ (13.3.12)

(13.3.10) $L = = xmv_y - ymv_x$ を$t$で微分し、運動方程式を用いる

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(xmv_y - ymv_x) = \frac{dx}{dt}mv_y + xm\frac{dv_y}{dt} - (\frac{dy}{dt}mv_x + ym\frac{dv_x}{dt})$$

$$= v_x mv_y + xF_y - (v_y mv_x + y F_x)$$

$$= xF_y - y F_x \qquad (13.3.13)$$

# 角運動量変化則(続)

$$\frac{dL}{dt} = xF_{\mathrm{y}} - yF_{\mathrm{x}} \qquad (13.3.13)$$

右辺の式は、z軸周りの力のモーメント (うでの長さ×力の大きさ）

これを$N$で表すと

$$\frac{dL}{dt} = N \qquad (13.3.14)$$

角運動量変化則

つまり、「z軸周りの角運動量$L$の時間的変化率は、z軸周りの力のモーメント$N$に等しい」

# 問37 角速度変化則

一定半径$r$の円周上を円運動する質量$m$の質点がある。円の中心点の周りの力のモーメントを$N$として、この質点の角速度$\omega$を決定する微分方程式$mr^2\frac{d\omega}{dt}=N$が角速度変化則から得られることを示せ

[解]　(13.3.11)から$L = rmv$である。これを時刻$t$で微分すると

$\frac{dL}{dt} = rm\frac{dv}{dt}$　ここで、$v = r\omega$だから、

$$\frac{dL}{dt} = rm\frac{dv}{dt} = rm\frac{d(r\omega)}{dt} = mr^2\frac{d\omega}{dt}$$

ここで角速度変化則から　$\frac{dL}{dt} = N$　　ゆえに、$mr^2\frac{d\omega}{dt} = N$

# 13.4 角運動量保存則

角運動量保存則:

　　$z$軸まわりの力のモーメント$N$が0ならば、角運動量は時間的に変化しない一定値である

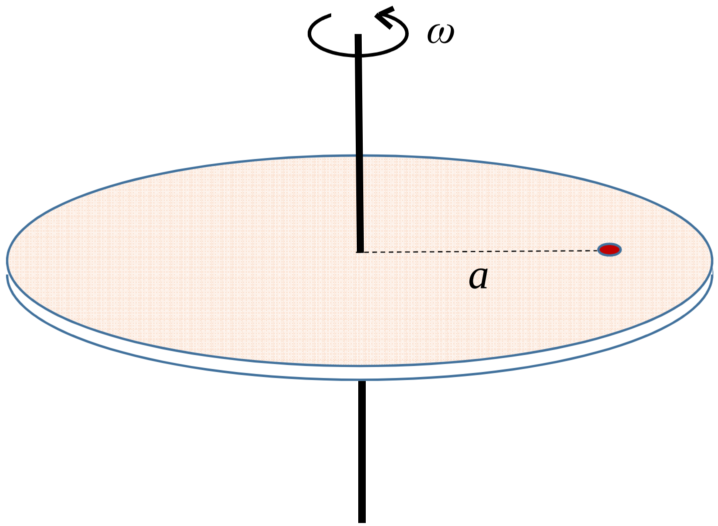
説明: 角運動量変化則　(13.3.14)　$\frac{dL}{dt} = N$

　　において、$N$=0とすると、$\frac{dL}{dt} = 0$

　　これより($t$で積分して) $L$の値は一定値となる

| 並進運動と回転運動の対応: | 並進運動 | 回転運動 |
|---|---|---|
| | 速度　$v$ | 角速度　$\omega$ |
| | 質量　$m$ | 慣性モーメント $I$ |
| | 運動量 $mv$ | 角運動量　$L$ $(=I\omega)$ |
| | 力　$F$ | 力のモーメント $N$ |
| 運動方程式 | $\frac{d(mv)}{dt} = F$ | 角運動量変化則　$\frac{dL}{dt} = N$ |

# 例題13.3 虫の運動




右図のように、中心を通る鉛直固定軸の周りを自由に回転でき、質量の無視できる水平な円板が、小さな虫を乗せ、角速度$\omega$で回転している。回転軸から虫までの距離は$a$である。いま虫が回転軸方向に向かって歩き出し、回転軸からの距離が $\frac{a}{2}$ の所まで来た時、円板の角速度を求めよ。

[解]　虫の質量を$m$、求める角速度を$\omega'$として考える。

(13.3.11)より回転軸と虫との距離が$a$のときの角運動量$L$と、距離が$\frac{a}{2}$のときの角運動量$L'$は、

$$L = ma^2\omega \qquad L' = m\left(\frac{a}{2}\right)^2\omega'$$

角運動量保存則から$L=L'$

$\therefore \quad \omega' = 4\omega$

# 一般の空間運動の場合の角運動量変化則

今までは、$xy$平面内での点Oまわりの回転運動だけを考えてきた

--- だから、$z$軸まわりの回転しか考えてこなかった

一般の空間運動の場合は、$yz$ 平面($x$軸周り)と$zx$平面($y$軸周り)の回転運動も考える必要がある

角運動量 $\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z) = (yp_z - zp_y,\ zp_x - xp_z,\ xp_y - yp_x)$

力のモーメント $\boldsymbol{N} = (N_x, N_y, N_z) = (yF_z - zF_y,\ zF_x - xF_z,\ xF_y - yF_x)$

x軸、y軸、z軸周りの角運動量：$L_x, L_y, L_z$

x軸、y軸、z軸周りの力のモーメント: $N_x, N_y, N_z$

# 一般の空間運動の場合の角運動量変化則(続)

角運動量 $\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z) = (yp_z - zp_y,\ zp_x - xp_z,\ xp_y - yp_x)$

力のモーメント $\boldsymbol{N} = (N_x, N_y, N_z) = (yF_z - zF_y,\ zF_x - xF_z,\ xF_y - yF_x)$

(13.4.16)

公式 13.3 一般の空間運動の場合の角運動量変化則

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N} \qquad (13.4.17)$$

$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{F}$ をそれぞれ、位置、運動量、力のベクトルとすると

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \qquad (13.4.18)$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad (13.4.19)$$

注: $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$
$\boldsymbol{p} = (p_x,\ p_y,\ p_z)$
$\boldsymbol{F} = (F_x,\ F_y,\ F_z)$

# 一般の空間運動の場合の角運動量の変化と力積モーメントの関係（角運動量原理）

時間$\Delta t = t_2 - t_1$に対する力の力積モーメント:

力のモーメントの時間積分　$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{N}\, dt$

単位は N·s[2]

角運動量の変化量: $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\, dt = \int_{L_1}^{L_2} d\boldsymbol{L} = L(t_2) - L(t_1)$

角運動量原理：角運動量の変化量は、その間にはたらいた力の力積モーメントに等しい

$$L(t_2) - L(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{N}\, dt \qquad (13.4.20)$$

# 13.5 中心力による運動

中心力: 力の作用線が常に定点を通る力、

つまり、常に定点と物体を結ぶ方向に力がはたらく

このときの定点を「力の中心点」という

中心力の例: 太陽が惑星に及ぼす万有引力

このときの中心点は太陽

質量$m$ の質点が中心点Oからの中心力だけをうけて一つの平面内

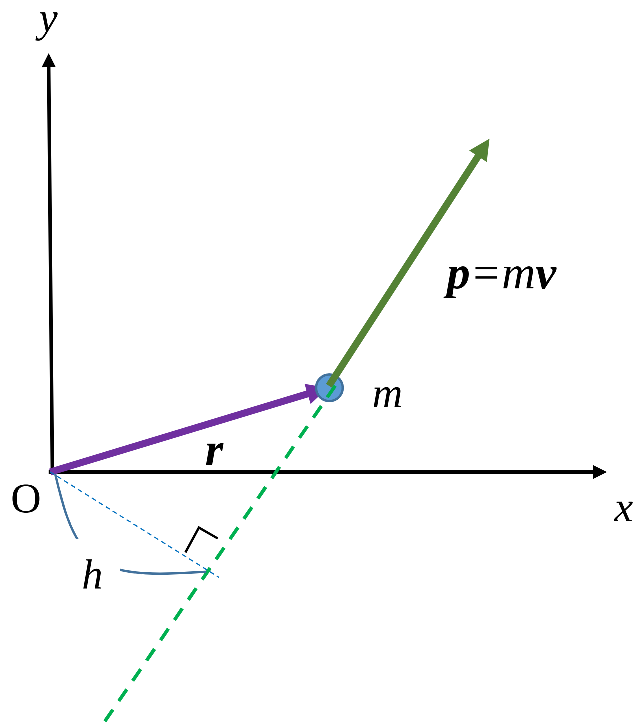
($xy$平面)で運動する場合を考える

# 中心力と角運動量保存則

力が中心力なら、定義から、その力の作用線は常に力の中心点を通る

⇒ 力の中心点Oと力の作用線の距離は 0

⇒ 力の中心点の周りの力のモーメントは 0




中心点周りの力のモーメントが 0 だから、角運動量保存則より、

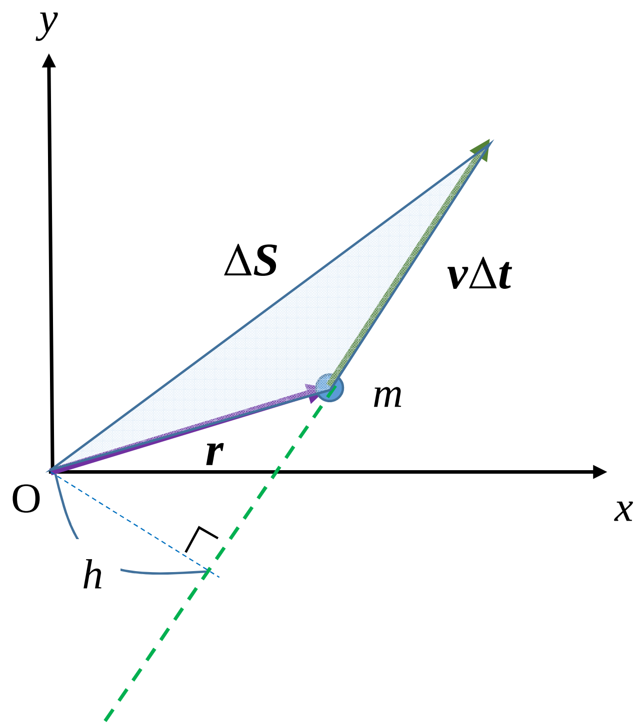
中心点の周りの角運動量($L$)は時間的に変化しない一定値

$$L = 一定値 = hmv$$

# 中心力と面積速度一定の法則

**面積速度**: 力の中心点と質点を結ぶ線分が単位時間あたりに描く面積の割合

$\Delta S$ : 力の中心点と質点を結ぶ線分が$\Delta t$秒間に描く面積




$$\Delta S = \frac{1}{2} hv\,\Delta t \qquad (\boldsymbol{v} : 質点の速度)$$

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} hv = \frac{hmv}{2m} = \frac{L}{2m} \qquad (13.5.21)$$

前のスライドより$L$は一定値

**面積速度一定の法則**:力の中心点と質点を結ぶ線分が単位時間あたりに描く面積の割合(面積速度)は一定

# 13.6 惑星の運動

太陽の周りを回る惑星の運動

　　　惑星は太陽からの万有引力をうけ、ひとつの平面内で太陽を焦点の一つとする楕円軌道上を運動

太陽から惑星に及ぼす万有引力は　中心力

　⇒　太陽の周りの惑星の角運動量は一定値

　　　太陽と惑星を結ぶ線分が描く面積速度も一定

# 惑星運動に関するケプラーの法則

惑星運動についてのケプラーの発見

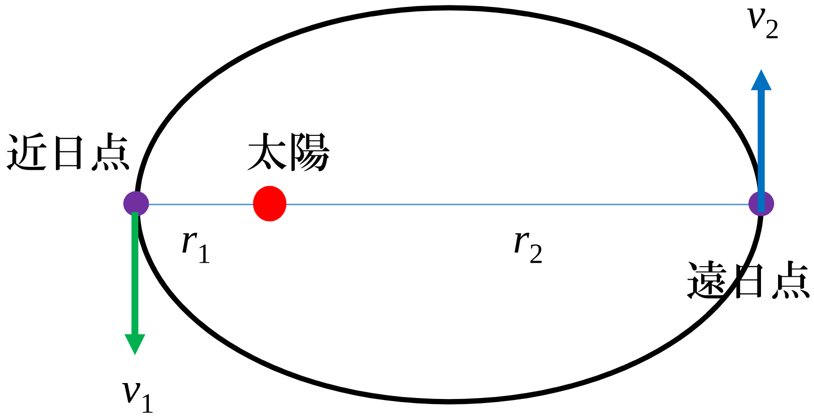
i. どの惑星も太陽をひとつの焦点とする楕円軌道にそって回る
ii. 太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に描く面積(面積速度)はそれぞれ一定
iii. 各惑星の公転周期$T$の２乗は、その楕円軌道の長半径$a$の３乗に比例。ここで比例定数は各惑星に共通の値

ニュートンの万有引力の法則の発見 --- ケプラーの法則の理論的な説明。万有引力の法則と運動の法則からこれを導く

# 例題13.4 近日点速度と遠日点速度

太陽から楕円軌道の近日点、遠日点までの距離をそれぞれ$r_1, r_2$とする。

惑星が近日点を通過するときの速さと、遠日点を通過するときの速さを求めよ。



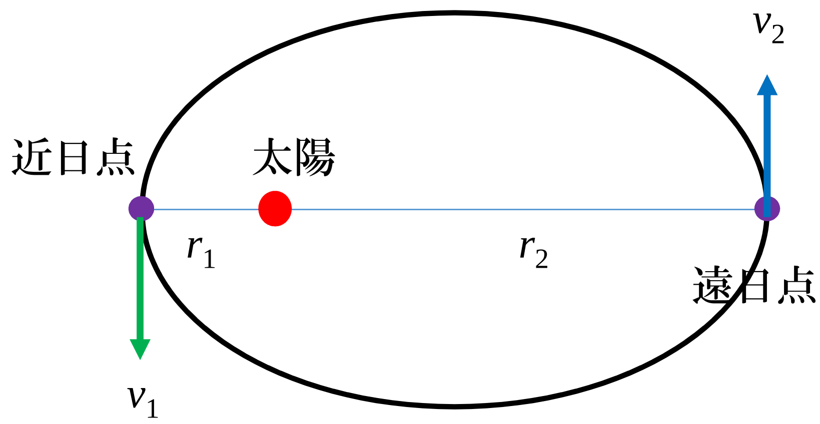

[解] 右図のように、惑星が近日点を通過する速さを$v_1$、遠日点を通過するときの速さを$v_2$とする。

面積速度一定の法則より、(面積速度=) $\frac{1}{2} r_1 v_1 = \frac{1}{2} r_2 v_2$

# 例題13.4 近日点速度と遠日点速度

面積速度一定の法則より、

$$\frac{1}{2} r_1 v_1 = \frac{1}{2} r_2 v_2 \qquad (13.6.22)$$




万有引力定数を$G$, 太陽の質量を$M$、惑星の質量を$m$とすると、力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m v_1{}^2 - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{1}{2} m v_2{}^2 - G\frac{Mm}{r_2} \qquad (13.6.23)$$

(13.6.22) から、 $v_2 = \dfrac{r_1}{r_2} v_1$ これを(13.6.23)に代入して

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1+r_2)}} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2GMr_1}{r_2(r_1+r_2)}}$$

# 問38 ケプラーの惑星運動の法則の導出

惑星の運動が太陽の周りの等速円運動であると近似して、万有引力の法則からケプラーの惑星運動に関する第３法則(iii) を導出せよ。

教科書の解答があるのでここでは解説しない。

解答を見ずに取り組んでみてください。