物理学(14)

担当: 白井　英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

14章　質点系の運動

系 (システム): 複数の物体からなる「物体の集団」

　　例　太陽とその周りの惑星

質点の系の運動を扱う

14.1 質点系の運動方程式

質点系: 質点の集団、集まり

例: 太陽系　--- 太陽とその惑星などからなる物体の集団

記号の約束: それぞれの質点に1,2,3…, nの番号を付ける

質量: $m_1, m_2, \ldots, m_n$

位置ベクトル: $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$

内力: 質点同士が及ぼしあう力(力の原因が系内)

外力: 質点が系外から受ける力(力の原因が系外)

14.1 質点系の運動方程式(続)

それぞれの質点の運動方程式:

$$m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{12} + \ldots + \boldsymbol{F}_{1n} \qquad (14.1.1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{21} + \ldots + \boldsymbol{F}_{2n} \qquad (14.1.2)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$m_n \frac{d^2 \boldsymbol{r}_n}{dt^2} = \boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{F}_{n1} + \ldots + \boldsymbol{F}_{nn-1} \qquad (14.1.3)$$

ここで、 $\boldsymbol{F}_{ij}$ は質点i (i=1,2,..,n)が質点 j ($i \neq j$) から受ける内力、

$\boldsymbol{F}_i$ は質点iが系外から受ける外力

これらはx, y, z成分を考えると３n個の連立方程式

内力について、 どのi、jに対しても、作用反作用の法則から

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} \qquad (14.1.4)$$

14.2 重心の運動方程式

(14.1.1)～(14.1.3)の辺々の和をとり、(14.1.4)を使う：

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+\ldots+m_n\boldsymbol{r}_n) = \boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\ldots+\boldsymbol{F}_\mathrm{n} \qquad (14.2.5)$$

ここで、 $M = m_1+m_2+\ldots+m_n$ --- 質点系の総質量

$\boldsymbol{r}_\mathrm{G} = (m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+\ldots+m_n\boldsymbol{r}_n)\,/M$ --- 質点系の重心 公式14.1

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\ldots+\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ --- 外力の総和

重心の運動方程式 $M\dfrac{d^2\boldsymbol{r}_\mathrm{G}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$ 公式14.2 (14.2.9)

これは質量M、位置の質点が外力Fを受けるときの運動方程式と同一

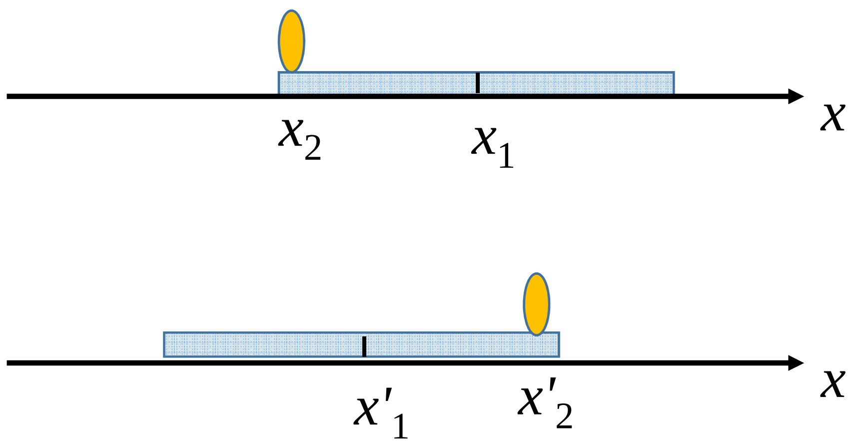
「重心はそこに系の全質量が集中し、それに全外力が作用したと考えた場合と同じ運動をする」

特に$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$のとき、重心は等速度運動をする

例題14.1 重心の運動

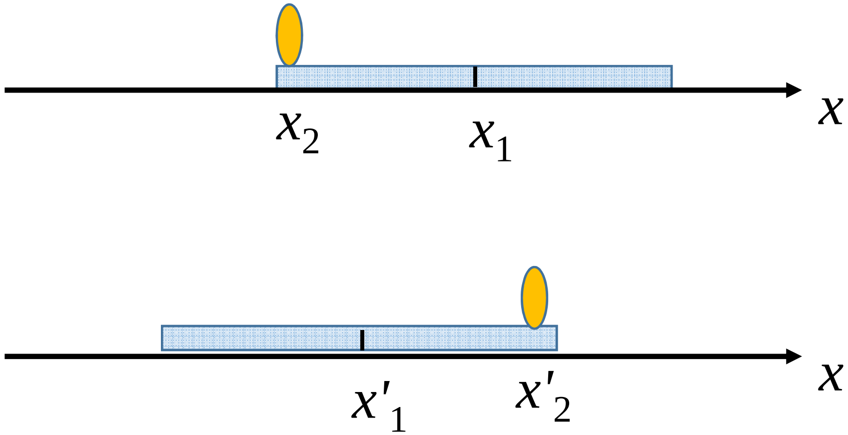
なめらかな水平な床の上に長さlで質量m_1、厚さ一定の密度一定の板があり、その左端に立っていた質量m_2の人が板の右端まで歩くと、その板はどれだけ動くか？床から見た移動距離を求めよ。

[解] 人と板を一つの質点系とみる
重心の水平方向の運動を考える。
外力は重力と床が板に及ぼす垂直抗力だけだが、これは運動に垂直で、運動には無関係
したがって、人と板は内力によって動く。



板の左端に人がいたときの板の重心の位置をx_1、人の位置をx_2、人が右端まで動いたときの板の重心の位置をx'_1、人の位置をx'_2とする。

例題14.1 重心の運動（続）



板の左端に人がいたときの板の重心の位置をx_1、人の位置をx_2、人が右端まで動いたときの板の重心の位置をx'_1、人の位置をx'_2とする。

人と板の重心の位置は、最初と最後で同じ位置であるので、

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2} \qquad (14.2.10)$$

人と板の重心の水平距離は、最初でも最後でも、同じ $l/2$ なので、

$$x_1 - x_2 = \frac{l}{2} \qquad x'_2 - x'_1 = \frac{l}{2} \qquad (14.2.11)$$

この２つの式から、 x_2、 x'_2を消去すると、

$$x'_1 - x_1 = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$$

ゆえに、板は左向きに $\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$ だけ移動する

14.3 全運動量と運動量保存則

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+\ldots+m_n\boldsymbol{r}_n) = \boldsymbol{F} \qquad (14.2.5)$$

これは次のように書き換えられる:

$$\frac{d}{dt}(m_1\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_1+m_2\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_2+\ldots+m_n\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_n) = \boldsymbol{F} \qquad (14.3.13)$$

質点系の全運動量　$\boldsymbol{P} = m_1\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_1+m_2\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_2+\ldots+m_n\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_n$ を定義すると、

(14.3.13)は以下のように書き換えられる:

公式14.3

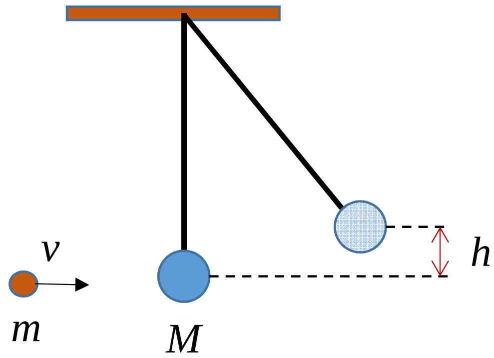
質点系の全運動量変化則:　$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}$

質点系の全運動量の時間変化率は全外力に等しい

運動量保存の法則:　特に全外力$\boldsymbol{F}$ = 0のとき　$\boldsymbol{P}$ =一定

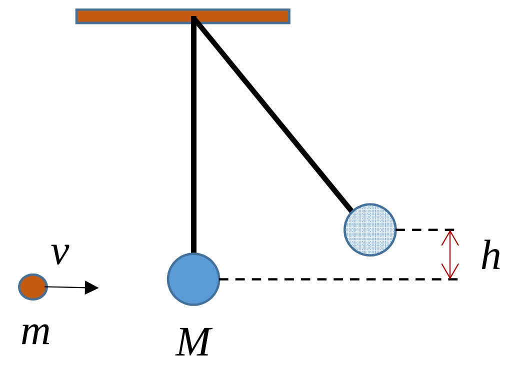
例題14.2　衝突

質量Mの砂袋が天井から糸で吊るされている。いま、水平方向から質量mの弾丸を最下点に静止している砂袋に打ち込んだところ、弾丸は砂袋と一体となって図のように高さhのところまで上がった。衝突直前の弾丸の速さをvとして、高さhを求めよ。



[解] 弾丸と砂袋を一つの質点系とみなす。これには外力として重力と糸の張力だけがはたらく。張力は運動と垂直にはたらくので影響を及ぼさない。衝突がきわめて短い時間でおきることを考えると、重力の影響も無視できる。したがって、衝突前後で、全運動量保存の法則が成り立つと考える。

例題14.2　衝突(続)



衝突直後の一体となった弾丸と砂袋の速さを*v'*とすると、全運動量保存の法則から

$$mv = (M+m)v' \qquad (14.3.17)$$

衝突後の運動では、力学的エネルギー保存則が成り立つ。つまり、衝突直後の位置を位置エネルギーの基準点にとれば(*g*を重力加速度の大きさとする）

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2 = (M+m)gh \qquad (14.3.18)$$

(14.3.17)と(14.3.18)から、 $h = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2$

例題14.2　衝突(続)

補足　衝突前後の力学的エネルギーの比較

衝突前: $\frac{1}{2}mv^2$

衝突後: $\frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}v^2$

その差：$\frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}v^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{-1}{2}\frac{mM}{M+m}v^2$ (14.3.20)

このように、衝突によって力学的エネルギーが保存されるとは限らない――失われたエネルギーは音や熱エネルギーとして放出

弾性衝突：　力学的エネルギーが保存(変化しない)される衝突

非弾性衝突：力学的エネルギーが保存されない衝突

反発係数(はね返り係数)

教科書にないが、知っておくべき用語なので説明する

同一直線上を進む２つの小球が衝突するとき、衝突前の2球の質量や速度がわかっていても、衝突後のそれぞれの速度を運動量保存則だけから求めることはできない。

なぜなら、2球の間の反発係数の値によって、衝突後の速度が異なる

反発係数 $e = \dfrac{\text{衝突後に遠ざかる速さ}}{\text{衝突前に近づく速さ}} = \dfrac{|\text{衝突後の相対速度}|}{|\text{衝突前の相対速度}|}$

ここで、 $0 \leqq e \leqq 1$ という値をとる。

弾性衝突ならば $e=1$ である

反発係数(はね返り係数)（続)

例：小球A,Bが同一直線上を運動して衝突するとき、A、Bの衝突前の速度をv_1, v_2、衝突直後の速度をv_1’, v_2’とする。

衝突前の相対速度= $v_1 - v_2$(近づくため正の値)、衝突直後の相対速度= $v_1' - v_2'$ (遠ざかるため負の値)なので、

$$e = \frac{|\text{衝突後の相対速度}|}{|\text{衝突前の相対速度}|} = \frac{-(v_1' - v_2')}{v_1 - v_2}$$

問題: ２物体がなめらかな平面を運動し、一直線上で弾性衝突するとき、力学的エネルギーが保存される。このとき、反発係数が1であることを示せ

問題: 2物体がなめらかな平面を運動し、一直線上で弾性衝突するとき、力学的エネルギーが保存される。このとき、反発係数が1であることを示せ

２物体の質量をそれぞれm_1, m_2、衝突前の速度をv_1, v_2、衝突後の速度をv'_1,v'_2とする。

力学的エネルギーが保存されるので、　$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2$　(a)

これから、　$m_1(v_1^2 - v'^2_1) = m_2(v_2^2 - v'^2_2)$

$\therefore\ m_1(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_2(v_2 - v'_2)(v_2 + v'_2)$

運動量保存則から　$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$

これから　$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v_2 - v'_2)$

(a)に代入し($v_1 \neq v'_1$とする、$v_1 = v'_1$なら$v_2 = v'_2$となるので自明）

$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2$　よって、$v_1 - v_2 = -(v'_1 - v'_2)$　$\therefore e = 1$

反発係数の例題

なめらかな水平面上にある直線の上を反対の向きに進む小球A(質量0.05kg, 速さ3.0m/s)と、小球B(質量0.10kg、速さ2.0 m/s)がある。これらが衝突した後の速度をそれぞれ求めよ。ただし、2球の間の反発係数を0.80とする。

[解] Aの初めの速度の向きを正の向きとする。また衝突直後の小球A,Bの速度をそれぞれv_1, v_2とする。

運動量保存則より、 $0.05\times3.0+0.10\times(-2.0)=0.05v_1+0.10v_2$

反発係数の式より $\dfrac{-(v_1-v_2)}{3.0-(-2.0)}=0.80$

$v_1+2v_2=-1.0$

$-v_1+v_2=4.0$

これらから、 $v_1=-3.0$ m/s　　$v_2=1.0$ m/s

ゆえにAは速さ3.0 m/sで初めとは逆向き、Bは速さ1.0 m/sで、最初のAと同じ向き

例題14.3 ロケットの推進力

どの天体からの万有引力も無視できるような宇宙空間を、搭載した燃料を燃やした噴射ガスを相対速度u ($u < 0$)で後方に放出しながら飛んでいるロケットの運動方程式を導け。ただし、ロケットの質量を$M(t)$、速度を$V(t)$とする。

[解] 時刻tから$t+\Delta t$ の間に、ロケットの質量が$M(t)$から$M(t+\Delta t)$ に変化した、その差をΔM (<0)で表す。つまり、 $\Delta M= M(t+\Delta t) - M(t)$

同様に、ロケットの速度の変化をΔVで表す: $\Delta V= V(t+\Delta t) - V(t)$

このΔt秒間におけるロケットの全運動量の差ΔPは

$$\Delta P=(M + \Delta M)(V+\Delta V) + |\Delta M| (V+u) - MV = -\Delta M \Delta V - \Delta M u$$

またロケットにかかる外力は0なので、全運動量保存の法則から $\frac{dP}{dt} = 0$

ここで、$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t}$

例題14.3 ロケットの推進力

$$\Delta P = -\Delta M\,\Delta V - \Delta M\,u + M\Delta V$$

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta t} \quad = 0$$

ここで、

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta M\,\Delta V - \Delta M\,u + M\Delta V}{\Delta t} \approx \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta M}{\Delta t}u + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{M\,\Delta V}{\Delta t} = -\frac{dM}{dt}u + M\frac{dV}{dt}$$

これらから、 $-\frac{dM}{dt}u + M\frac{dV}{dt} = 0$

書き換えて、 $M\frac{dV}{dt} = \frac{dM}{dt}u$ 　これがロケットの運動方程式である

右辺の項は、ガスの放出によるロケットの推進力

14.4 全角運動量とその変化則

質量m、運動量$\boldsymbol{p}_{\mathrm{i}}$ (i=1,2,…,n) の質点が持つ原点Oの周りの

角運動量　　$\boldsymbol{L}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{i}} \times \boldsymbol{p}_{\mathrm{i}}$　　　　(13.4.18)

系の全角運動量$\boldsymbol{L}$: 各質点のもつ全角運動量の総和

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \ldots + \boldsymbol{L}_{\mathrm{n}} \qquad (14.4.25)$$

$\frac{d\boldsymbol{L}_{\mathrm{i}}}{dt} = \boldsymbol{N}_{\mathrm{i}}$(13.4.17)、$\boldsymbol{N}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{i}} \times \boldsymbol{F}'_{\mathrm{i}}$ (13.4.19)、

$m_i \frac{dr_i}{dt} = \boldsymbol{F}'_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{i1}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{i2}} + \ldots + \boldsymbol{F}_{\mathrm{in}}$ (14.1.1)から、

$\frac{d\boldsymbol{L}_{\mathrm{i}}}{dt} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{i}} \times (\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{i1}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{i2}} + \ldots + \boldsymbol{F}_{\mathrm{in}})$　　　　(ただし$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ii}}$ =0)

14.4 全角運動量とその変化則（続）

$$\frac{d\boldsymbol{L}_\mathrm{i}}{dt} = \boldsymbol{r}_\mathrm{i} \times (\boldsymbol{F}_\mathrm{i} + \boldsymbol{F}_\mathrm{i1} + \boldsymbol{F}_\mathrm{i2} + \ldots + \boldsymbol{F}_\mathrm{in}) \qquad (\text{ただし} \boldsymbol{F}_\mathrm{ii} = 0) \qquad (14.4.26)$$

また$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \ldots + \boldsymbol{L}_\mathrm{n}$ (14.4.25)を時間tで微分

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{L}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{L}_2}{dt} + \ldots + \frac{d\boldsymbol{L}_\mathrm{n}}{dt}$$

これに(14.4.26)をあてはめて

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{12} + \ldots + \boldsymbol{F}_{1\mathrm{n}}) + \boldsymbol{r}_2 \times (\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23} + \ldots + \boldsymbol{F}_{2\mathrm{n}}) + \ldots$$

$$+ \boldsymbol{r}_\mathrm{n} \times (\boldsymbol{F}_\mathrm{n} + \boldsymbol{F}_\mathrm{n1} + \boldsymbol{F}_\mathrm{n2} + \ldots + \boldsymbol{F}_\mathrm{nn\text{-}1})$$

$$= \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{r}_\mathrm{n} \times \boldsymbol{F}_\mathrm{n}$$

$$+ (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_{12} + (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3) \times \boldsymbol{F}_{13} + \ldots + (\boldsymbol{r}_\mathrm{n\text{-}1} - \boldsymbol{r}_\mathrm{n}) \times \boldsymbol{F}_\mathrm{n\text{-}1,n}$$

14.4 全角運動量とその変化則（続）

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{F}_n$$

$$\boxed{+\,(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_{12} + (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3) \times \boldsymbol{F}_{13} + \ldots + (\boldsymbol{r}_{n-1} - \boldsymbol{r}_n) \times \boldsymbol{F}_{n-1,n}}$$

内力$\boldsymbol{F}_{jk}$が$(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)$と同じ方向であるから、
外積の定義より、これらはみな 0 となる

$$\therefore \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{F}_n$$

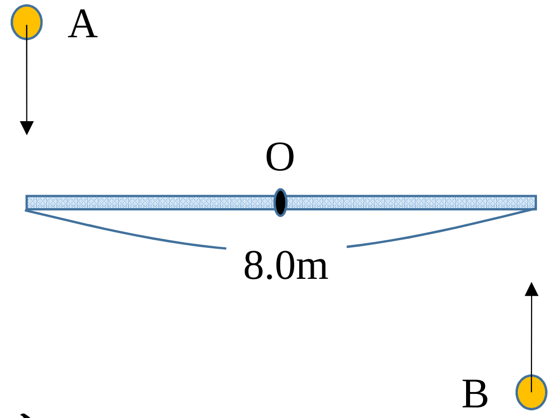
ここで、 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{F}_n$ (14.3.31)

ゆえに $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$ (14.3.30) 全角運動量変化則

特に $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0}$のとき、 $\boldsymbol{L}$は一定値をとる＝全角運動量が保存される

例題14.4　角運動量と全角運動量

氷面上に長さ8.0mのロープが張ってあり、体重60kgの2人のスケート選手A, B がそれに直角に、互いに反対方向から、同じ速さ5.0 m/sで近づき、同時にロープをつかんだ。2人の進路の平行線の間隔はちょうどロープの長さに等しいとする。



(1) ロープの中心Oに関する各人の角運動量はいくらか

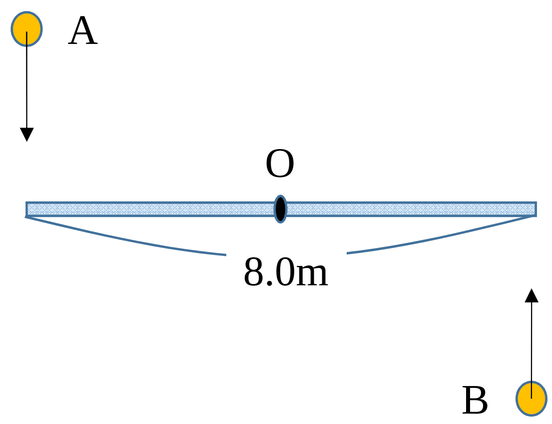
[解] 人を質点とみなし、ロープは軽く、また氷面は滑らかで摩擦がはたらかないとする。

Aの角運動量L_A:　$L_A = hp = hmv = 4.0 \times 60 \times 5.0 = 1.2 \times 10^3$ kg･m^2/s

Bの角運動量L_B:　$L_B = hp = hmv = 4.0 \times 60 \times 5.0 = 1.2 \times 10^3$ kg･m^2/s

例題14.4　角運動量と全角運動量

(2) ２人がロープをたぐって4.0mの長さに縮めたとき、各人の速さはいくらか。



[解]　A,Bともに受ける外力はロープの張力だけであり、この張力はロープの中心Oの周りのモーメントをもたない。ゆえに全角運動量は保存される。

ロープをたぐって4.0mの長さに縮めたときの2人の速さをv' [m/s]とすると、中心からの距離h'=2.0mとして、全角運動量Lは(1)から$2\times1.2\times10^3$ kg· m^2/s に等しい。また

$L = 2h'mv' = 2\times2.0\times60\times v' = 2.4\times10^2 v'$

したがって、$v' = 2.4\times10^3 /(2.4\times10^2) = 10$ [m/s]