# 物理学(15)

担当: 白井　英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

## 15章　剛体の運動

大きさをもつ剛体の運動を考える

剛体とは: 大きさを持ち、変形しない物体
つまり「変形」はここでは扱わない (構造力学や材料力学で扱う)

## 剛体運動の自由度

剛体運動の分類
- 並進運動
- 回転運動

並進運動では
剛体の重心の位置の指定---3つの位置座標
⇒　自由度 3
回転運動では
回転軸の方向の指定--- 3 つの回転軸まわりの回転角
⇒　自由度 3
あわせて、剛体の運動の自由度は 6

## 15.1 剛体の運動方程式

剛体を微小部分にわけ、それぞれを質点とみなす
⇒　構成質点間の相互の距離が変化しない質点系としての剛体

このことから、一般的に
質点系で成り立つことは剛体でも成り立つ

## 15.1 剛体の運動方程式(続き)

剛体の運動（剛体の質量を$M$とする）

並進運動 --- 重心(位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_G$とする)の運動方程式

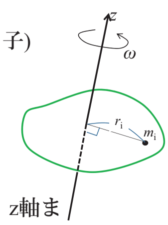
$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} = \boldsymbol{F} \quad (\boldsymbol{F}\text{は剛体にはたらく外力の総和}) \qquad (15.1.1)$$

回転運動 --- 原点Oまわりの剛体の回転運動を考える

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$$

($\boldsymbol{L}$は剛体の角運動量、$\boldsymbol{N}$は外力モーメントの総和）(15.1.2)

## 15.2 固定軸の周りの回転運動




固定軸のまわりで回転する場合(例: 定滑車や振り子)
固定軸を$z$軸とすると、(15.1.2)のz成分：

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z \qquad (15.2.3)$$

により、回転運動は決まる

剛体を微小部分に分割、$i$番目の部分の質量を$m_i$、z軸までの距離を$r_i$とする

# 15.2 固定軸の周りの回転運動(続)

剛体を微小部分に分割、$i$番目の部分の質量を$m_i$、z軸までの距離を$r_i$とする

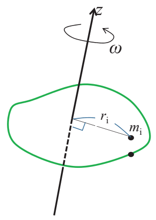
基準位置からの回転角を$\theta$とし、剛体が角速度$\omega(=\frac{d\theta}{dt})$で回転するなら、これら$m_i$はz軸の周りに同じ角速度ωで円運動する

それぞれの微小部分 $m_i$がもつ角運動量:

$r_i p_i = r_i\ m_i\ r_i\ \omega$

よって、剛体全体が持つ角運動量はこれらの和:

$L_z = \sum_i r_i\ m_i\ r_i\ \omega = \omega \sum_i r_{i\,2}\, m_i$




# 15.2 固定軸の周りの回転運動(続)

それぞれの微小部分 $m_i$がもつ角運動量:

$r_i p_i = r_i\ m_i\ r_i\ \omega$

よって、剛体全体が持つ角運動量:

$L_z = \sum_i r_i\ m_i\ r_i\ \omega = \omega \boxed{\sum_i r_{i\,2}\, m_i}$

対比:並進の運動方程式 $m\frac{d^2x}{dt^2}=F$ において質量$m$は並進運動のしにくさを表す

ここで、　$I_z = \sum_i r_{i\,2}\, m_i = r_1{}^2 m_1 + r_2{}^2 m_2 + \ldots$とする

$I_z$は z軸周りの慣性モーメント　(単位は kg･m²)

慣性モーメントは回転運動のしにくさを表す

$L_z = I_z\, \omega$　　　　　　(15.2.6)

この式を(15.2.3)に代入（$I_z$は一定)　　　$I_z \frac{d\omega}{dt} = N_z$

あるいは　　$I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_z$　　　　回転の運動方程式

# 回転の運動方程式 $I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = N_z$　　(15.2.8)

慣性モーメント

$I_z = \sum_i r_{i\,2}\, m_i = r_1{}^2 m_1 + r_2{}^2 m_2 + \ldots$　　(15.2.5)

この式から言えること

回転軸から離れたところに大きな質量があると$I_z$が大きい
⇒ 慣性モーメントが大きい ⇒ 回転しにくい

外力モーメントの和 $N_z$=0 ならば角速度($\omega$)は一定
⇒回転しない、もしくは等角速度の回転

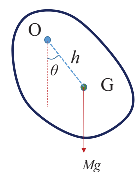
# 例題15.1 剛体振り子

剛体を水平な固定軸の周りに自由に回転できるようにしたもの

⇒ 重力の作用によって振らせることができる

剛体振り子の微小振動の周期を求めよ。

[解] 右図のように剛体の質量をM、固定軸をO、重心をG、Gから軸Oまでの距離を$h$、軸Oの周りの慣性モーメントを$I$とする。また線分OGが鉛直下方となす角$\theta$によって回転角を表すことにする。




式(15.2.8) に相当する式は：

$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh \sin\theta$

これを変形して　$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha \sin\theta$　　ただし　$\alpha = Mgh / I$

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin\theta$　　ただし　$\omega^2 = Mgh / I$

ここで、微小振動の場合は(9.4.50)と同様に

$\sin\theta \fallingdotseq \theta$

とみなせるので、$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\, \theta$　と近似できる

これから、$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \alpha)$　という一般解が得られる（α、$\theta_0$は初期条件によってきまる定数）

よって剛体振り子が微小振動する場合の周期$T$は

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$

# 15.3 慣性モーメントの計算例

剛体の慣性モーメントの計算の役にたつ定理

薄板の直交軸定理

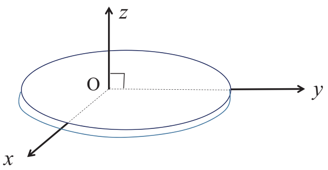
平行軸定理

# 定理15.2 薄板の直交軸定理

図のような薄板について、薄板内のO点を原点とし、互いに直交する$x$軸と$y$軸を薄板内にとり、薄板と直交する方向に$z$軸を取る。

すると、$x$軸、$y$軸の周りの薄板の慣性モーメント$I_x$, $I_y$と、$z$軸の周りの慣性モーメント$I_z$の間には次が成り立つ:

$$I_z = I_x + I_y$$

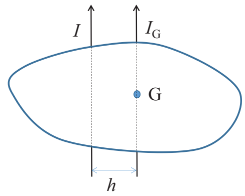



# 定理15.3 平行軸定理

剛体の重心Gを通る軸の周りの慣性モーメント$I_G$がわかると、その軸と並行で距離$h$だけ離れた軸の周りの慣性モーメント$I$は次で与えられる：

$$I = I_G + Mh^2 \qquad (15.3.12)$$

ここで$M$は剛体の質量である。




# 15.4 剛体の平面運動

剛体の平面運動：

剛体が回転軸の周りに回転、

かつ、回転軸(≒重心)が平行移動する運動

運動方程式：

並進運動 $$M\frac{d^2\boldsymbol{x}_G}{dt^2} = \boldsymbol{F} \qquad (15.1.1)$$

$\boldsymbol{F}$は剛体にはたらく外力の総和、$\boldsymbol{x}_G$は重心の位置

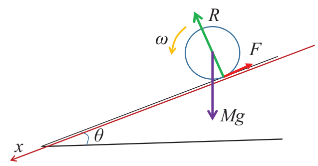
回転運動 $$I\frac{d\omega}{dt} = \boldsymbol{N} \qquad (15.1.2)$$

$I$は慣性モーメント、$\boldsymbol{N}$は外力モーメントの総和

# 例題15.4 斜面を転がり落ちる円柱

半径$a$、質量$M$の密度一様な円柱が、水平と傾角$\theta$をなす粗い斜面上をすべらずに転がり落ちるとき、重心の加速度、回転の角速度、摩擦力の大きさをそれぞれ求めよ。

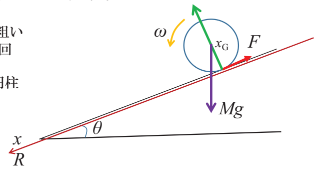
　また、静止摩擦係数が$\mu$のとき、斜面に静かに置いた円柱がすべらずに転がるための条件を求めよ。




# 例題15.4 斜面を転がり落ちる円柱

半径$a$、質量$M$の密度一様な円柱が、水平と傾角$\theta$をなす粗い斜面上をすべらずに転がり落ちるとき、重心の加速度、回転の角速度、摩擦力の大きさをそれぞれ求めよ。

　また、静止摩擦係数が$\mu$のとき、斜面に静かに置いた円柱がすべらずに転がるための条件を求めよ。




[解] 斜面にそって下方に$x$軸を取り、重心の座標を$x_G$、円柱の中心軸の周りの回転の角速度を$\omega$、斜面に沿って情報にはたらく摩擦力を$F$とする。

並進運動の運動方程式：

$$M\frac{d^2\boldsymbol{x}_G}{dt^2} = Mg\sin\theta - F \qquad (15.4.15)$$

回転運動の運動方程式($I$は慣性モーメント)：

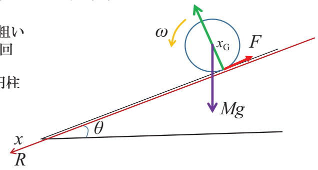
$$I\frac{d\omega}{dt} = aF \qquad (15.4.16)$$

これを解くには$I$を求める必要がある: p.182-3の式から $I = \frac{1}{2}a^2M$

# 例題15.4 斜面を転がり落ちる円柱

半径$a$、質量$M$の密度一様な円柱が、水平と傾角$\theta$をなす粗い斜面上をすべらずに転がり落ちるとき、重心の加速度、回転の角速度、摩擦力の大きさをそれぞれ求めよ。

　また、静止摩擦係数が$\mu$のとき、斜面に静かに置いた円柱がすべらずに転がるための条件を求めよ。




並進運動の運動方程式：

$$M\frac{d^2\boldsymbol{x}_G}{dt^2} = Mg\sin\theta - F \qquad (15.4.15)$$

回転運動の運動方程式($I$は慣性モーメント)：

$$\frac{1}{2}a^2M\frac{d\omega}{dt} = aF \qquad (15.4.16)$$

斜面をすべらず回転することから

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}_G}{dt^2} = a\frac{d\omega}{dt} \qquad (15.4.17)$$

これを解いて、

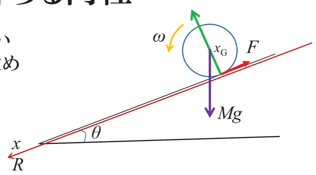
重心の加速度$\frac{d^2\boldsymbol{x}_G}{dt^2} = \frac{2}{3}g\sin\theta$

回転の角速度$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{3a}g\sin\theta$

摩擦力$F = \frac{1}{3}Mg\sin\theta$

# 例題15.4 斜面を転がり落ちる円柱

静止摩擦係数が$\mu$のとき、斜面に静かに置いた円柱がすべらずに転がるための条件を求めよ。




[解] 斜面の垂直抗力を$R$とする。

斜面に垂直な方向の重心の運動方程式（つりあい）

$$R = Mg\cos\theta$$

より、最大静止摩擦力は

$$\mu R = \mu Mg\cos\theta$$

これより、すべらない条件は

$$F = \frac{1}{3} Mg\sin\theta \leqq \mu Mg\cos\theta$$

これにより

$$\frac{1}{3}\tan\theta \leqq \mu$$