中京大学試験問題・解答用紙

学科目	物 理 学(力学)	出題者	白井 英俊	試験日	2017 年 5 月 29 日 月曜日 1 限実施
試験持込の 可 否	一切の持込不可 注意：字は丁寧にきれいに書くこと。判読困難な場合は採点対象としない。説明や計算式を書くこと				

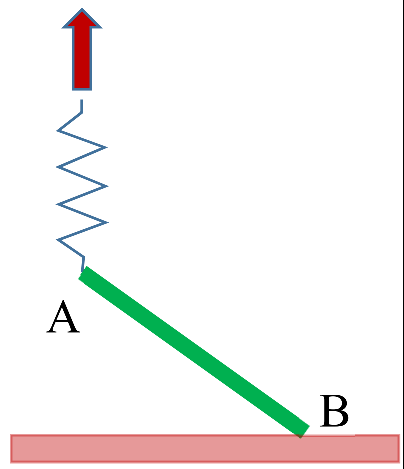
問題 1 ばねを使って、長さ 0.60m の棒 AB の重さをはかることを考えた。以下の問いに答えよ。ただし以下では重力加速度の大きさを $10\ \mathrm{m/s^2}$ として計算せよ。

(1) このばねは下端に 1.00kg の分銅をつるすと 0.17m の長さになり、1.50kg の分銅をつるすと 0.18m の長さになった。このことから、このばねのばね定数と自然長の長さを求めよ。ただし、それぞれ単位を明記すること。

バネ定数を k [N/m]、バネの自然長を L[m]とすると、 $1.00\times10 = (0.17 - L)\times k$

$1.50\times10 = (0.17 - L)\times k$ が成り立つ。これらから、 $L=0.15$ m, $k = 5.0\times10^2$ [N/m]と求められる。

(2) この棒は重いため、このばねにつるしてその伸びを計ろうとすると、ばねの弾性限度以上に伸びてしまう。そこで棒の端を滑らかで水平な床につけて計測した。右図は A 端にばねをつけ B 端を床につけて計測した様子である。ここで棒は均一ではないため、重心が棒の中心にあるとは限らないことに注意して以下に答えよ。



(a) 棒の質量を M[kg]、棒の重心が B 端から x[m]の位置にあるとし、A 端に(1)で計測したばねをつけ B 端を床に接触させて計測した時、ばねの長さは 0.20m となり、棒と床とのなす角が α であった。このときの、力のモーメントのつりあいの式をかけ。

上に引く力を F [N] とすると、 B 点回りの力のモーメント: $Mgx\cos\alpha\ -0.60\,F\cos\alpha=0$

(1)の結果を用いると、$F=\ (0.20 - 0.15)\times k = 25$ N であるから、$Mgx\cos\alpha = 15\cos\alpha$

(b) (a)と同じく、棒の質量を M[kg], 棒の重心が B 端から x[m]の位置にあるとする。今度は B 端に(1)で計測したばねをつけ A 端を床に接触させて計測した時、ばねの長さは 0.30m となり、棒と床とのなす角を β であった。このときの力のモーメントのつりあいの条件式をかけ。

上に引く力を F' [N] とすると、 A 点回りの力のモーメント: $Mg(0.60 - x)\cos\beta\ - 0.60\,F'\cos\beta=0$

(1)の結果を用いると、$F'=\ (0.30 - 0.15)\times k = 75$ N であるから、$M\,g(0.60 - x)\cos\beta = 45\cos\beta$

(c) 上の二つの式から、棒の質量と棒の重心の位置を求めよ。（注意： (a),(b)で仮定した M と x の値を数値で答えること）

(a)を整理すると、 $Mgx = 15$

(b)を整理すると、 $M\,g(0.60 - x) = 45$

これから、 $15(0.60 - x) = 45x$

$9.0 = 60\,x$ ∴ $x = 0.15$ m

よって、 $M = 10$ kg

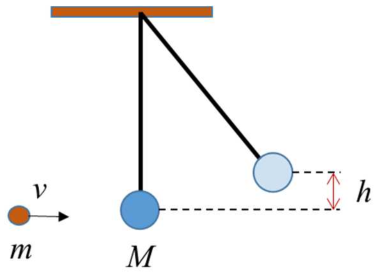
問題 2. 摩擦力には静止摩擦力と動摩擦力がある。この二つの類似点と相違点が明確になるよう、それぞれについてなるべく詳しく説明せよ。ただし「摩擦」および「摩擦力」という用語は使ってもよい(これらの語の意味は既知と仮定してよい)とする。

ここでは物体に加えられる外力の総和を「外力」と呼ぶことにする。物体が他の物体（空気や液体も含む）と接しており、ある方向に対し外力が加えられているのにもかかわらずその力の方向に対して他の物体との相対速度が0のとき、外力と逆向きに働く摩擦力を静止摩擦力という（注意：必ずしも物体は静止しているとは限らず、別の方向には運動していてもよい） 。物体が粗い斜面に置かれた状態を例に取って説明すると、その面と物体との静止摩擦力係数を μ とし、その面に対する垂直抗力を N とすると、ある方向に対し加えられる外力が μN 以下であればそれと等しい静止摩擦力が働き、その物体のその方向の加速度は 0 となる。また μN 以上の力の場合は、物体は力の方向に動き出し、静止摩擦力は0となる.

また、動いている物体に働く摩擦力を動摩擦力といい、斜面に置かれた物体を例に取り、動摩擦係数 μ', 垂直抗力Nとすると、一定の摩擦力 μ'Nが物体の動きとは逆の方向に働く。この摩擦力が動摩擦力である。静止摩擦力と動摩擦力では接している他の物体との相対速度、および力の大きさに違いがある。

工 学部 電気電子工 学科 年	番号		氏名		採点

問題 3. 質量 M [kg]の砂袋が天井から軽く伸び縮みしない糸でつり下げられている。いま、水平方向から質量 m [kg]の弾丸を最下点に静止している砂袋に打ち込んだところ、弾丸は砂袋と一体となって図のように高さ h[m]のところまで上がった。ただし空気抵抗は無視できるものとし、重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。



(1) 衝突直前の弾丸の速さを v[m/s]として、高さ h[m]を求めよ。

衝突後の速さを V[m/s]とする。

運動量保存則から、 $mv = (M+m)V$ が成り立つ。よって、 $V = mv/(M+m)$

また力学的エネルギー保存則より、 $\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh$

よって、 $h = \frac{\frac{1}{2}(M+m)V^2}{(M+m)g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2$

(2)最初に弾丸が持っていた力学的エネルギーと、衝突後に一体となった物体の力学的エネルギーの差を求めよ。また。このエネルギーの差がなぜ生じたのか、説明せよ。

最初のエネルギー=$\frac{1}{2}mv^2$

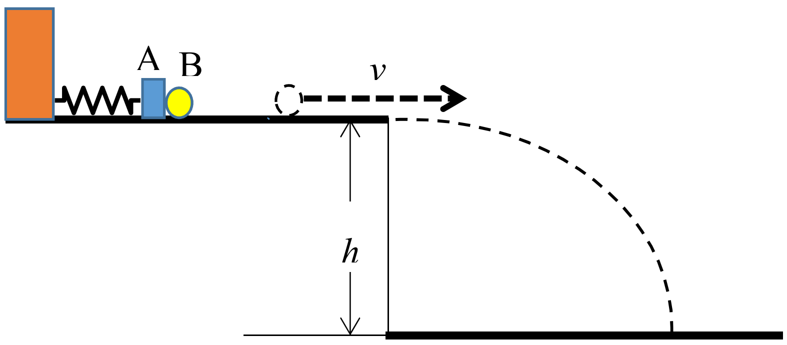
最終エネルギー = $(M+m)gh = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{M+m}$

よってこの差は $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{M+m} = \frac{1}{2}\frac{mMv^2}{M+m}$ これは衝突のときに発生する音や光、熱エネルギーになったと考えられる。

問題 4. 図のようにバネ定数 k のバネに質量 M の板 A をとりつけ、この板に質量 m の小球 B を接触させる。板 A に小球 B を接触させたままバネを自然長から長さ ℓ だけ縮ませてから放すと、バネが自然長になったところで小球 B は板から離れ、なめらかな水平面をすべり、床に落下する。床と水平面との距離を h, 重力加速度の大きさを g とし、空気の抵抗は無視できるものとする。

(1) このバネを自然長から長さ ℓ だけ縮ませたときの弾性エネルギーの大きさを答えよ。

バネの弾性エネルギーの式から $\frac{1}{2}k\ell^2$



(2) 小球 B が水平面をすべる時の速さ v を k, M, m, ℓ を用いて表せ。

小球 B の速さは板 A から B が離れたときの速さと同じ。

ここでエネルギー保存則から $\frac{1}{2}k\ell^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2$

よって $v = \sqrt{\frac{k}{M+m}}\,\ell$

(3) 小球 B が床に落下し、床と衝突する直前の鉛直方向の速さを g と h で表せ。

求める速さを v, 落下するのにかかる時間を t とすると、 $\frac{1}{2}gt^2 = h$ および $v = gt$ が成り立つ

よって $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ から、$v = \sqrt{2gh}$

(4) 床と小球との反発係数は 0.80 であった。小球は床に落ちてからどのくらいの高さまで跳ね上がるか、h を用いて表せ。

鉛直方向だけを考える。落下直後の鉛直方向の速さを V とすると、跳ね返った直後の速さは $0.8V$ である

力学的エネルギー保存則より、跳ね返ったときの最高点の高さ H とすると、

$mgH = \frac{1}{2}m\,(0.8V)^2 = \frac{0.64}{2}mV^2$ よって$H = \frac{0.64}{2g}V^2$

ここで(3)から $V = \sqrt{2gh}$ より、$\frac{0.64}{2g}V^2 = 0.64h$

中京大学試験問題・解答用紙

学科目	物 理 学(力学)	出題者	白井 英俊	試験日	2017 年 5 月 29 日 月曜日 1 限実施
試験持込の 可 否	一切の持込不可 注意:字は丁寧にきれいに書くこと。判読困難な場合は採点対象としない。説明や計算式を書くこと				

問題 5. 右図 A のように、半径 2.0 [m]の円周上を小物体 P が等速円運動している。
計測したところ、円周を 10 周するのに 5.0 s かかった。この P の運動について、以下の物理量(数値と単位)を求めよ。ただし円周率として π(π のままの表記でよい)を用いよ。

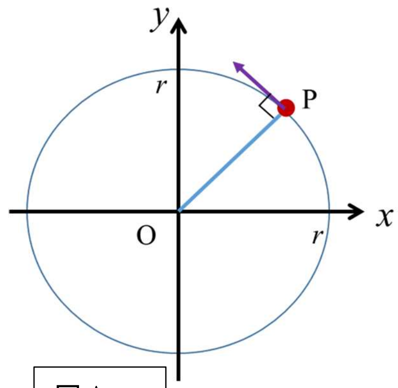


図 A

(a) 周期 $5.0 / 10 = 0.50$ s

(b) 角速度 $2\pi/0.50 =$ 4.0π rad/s

(c) (接線方向の)速さ $4.0\pi\times2.0 = 8.0\pi$ m/s

(d) 向心加速度の大きさ $(8.0\pi)^2 / 2.0 =$ $32\pi^2$ m/s^2

(e)下図Bは横軸が時刻 t [s]、縦軸が y 座標 (単位はm)である。ここに$0 \leqq t \leqq 1.0$ におけるPの運動を表わせ。ただし時刻 t=0 のとき小物体Pは図Aの座標 (2.0, 0) にあった。また図Bでは $r = 2.0$ m である。.

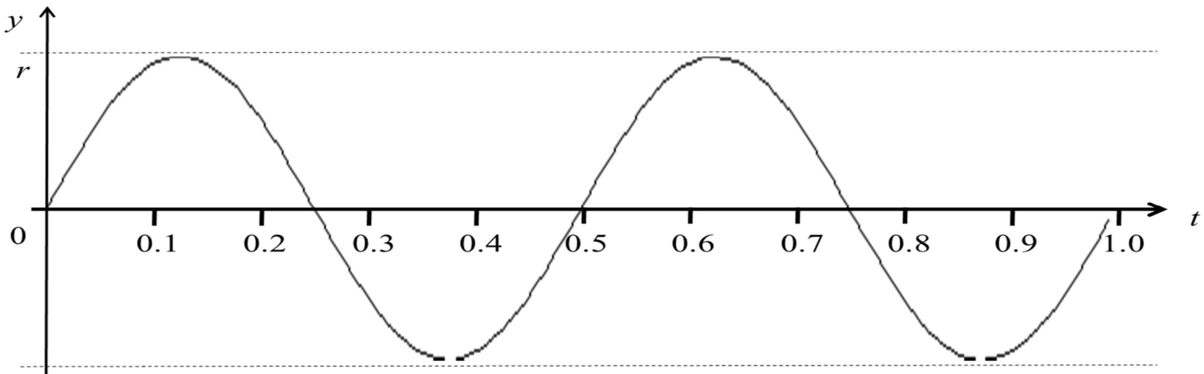
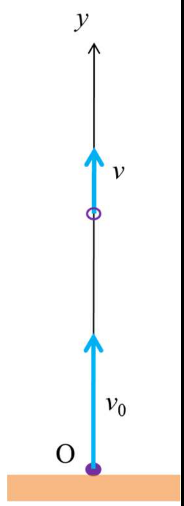


図 B

問題 6. 右図に示す点 O から速さ v_0 [m/s]で鉛直上向きに投げ上げられた質量 m kg]の小物体 A の t 秒後の速度と位置を求めたい。ただし小物体 A は一様な重力および、**物体の質量と速度との積に比例した空気の抵抗**(比例定数は k とする)をうけて運動する。なお重力加速度の大きさを g [m/s^2]とし、鉛直上方に y 軸を取り、点 O をその原点とせよ。



(1) この運動における小物体 A の運動方程式を、速度を(上向きを正として) v [m/s]、加速度を $\frac{dv}{dt}$ [m/s^2] として表せ。

小物体 A に働く力は重力と空気抵抗のみだから、$m\frac{dv}{dt} = -mg - kmv$

(2) 初期条件($t = 0$ における小物体の位置や速度)を考慮して(1)の微分方程式を解け(つまり地表面に落下するまでの時刻 t [s] ($t \geqq 0$) における速度を答えよ)。ただし答えだけではなく、答えを導く式の説明をつけること。

(1)より $\frac{dv}{dt} = -k(v + \frac{g}{k})$ よって $\frac{1}{(v+\frac{g}{k})}\frac{dv}{dt} = -k$

t で両辺を積分: $\int \frac{1}{(v+\frac{g}{k})} dv = -k \int dt$

積分定数を C とすると $\log\left(v + \frac{g}{k}\right) = -kt + C$

両辺を exp の引数とすると $v + \frac{g}{k} = \exp(-kt + C) = C' \exp(-kt)$ ここで $C'=exp(C)$とした

$t = 0$のとき $v = v_0$ であったことから $C' = v_0 + \frac{g}{k}$

$\therefore\ v = (v_0 + \frac{g}{k}) \exp(-kt) - \frac{g}{k}$

(裏面に続く)

工 学部 電気電子工 学科 年	番号		氏名		採点	

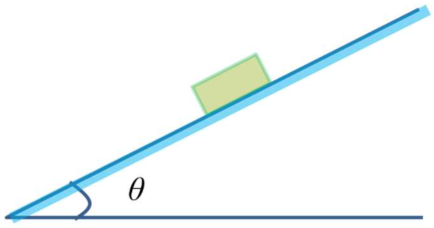
(3) 初期条件($t=0$ における小物体の位置や速度)を考慮して(2)の結果から、投げ上げられて地表面に落下するまでの時刻 t [s]における小物体 A の位置を表す式をかけ。ただし答えだけではなく、答えを導く式の説明をつけること。

(2)から$v = (v_0 + \frac{g}{k})\ \exp(-kt) - \frac{g}{k}$

これを t で積分し、$t=0$ のとき$y=0$ であることを利用して、位置を求める:

$$y = \frac{1}{k}(v_0 + \frac{g}{k})\ (1 - \exp(-kt)) - \frac{g}{k}t$$

問題 7. 右図のように、水平面に対し傾角 θ[rad]の粗い斜面に質量 m [kg]の小物体 A を置いたところ、A は静止していた。なお、重力加速度の大きさを g [m/s^2]とし、斜面と小物体との静止摩擦係数を μ、動摩擦係数を μ' とする。また空気抵抗は無視できるものとする。答えだけではなく説明も適宜つけよ。



以下では答えだけではなく、答えを導く考え方や式も明記すること。

(1) 小物体 A にはたらく力のうち、斜面から受ける垂直抗力の大きさを求めよ。

斜面から受ける垂直抗力と重力の斜面に垂直な成分とがつりあうことから

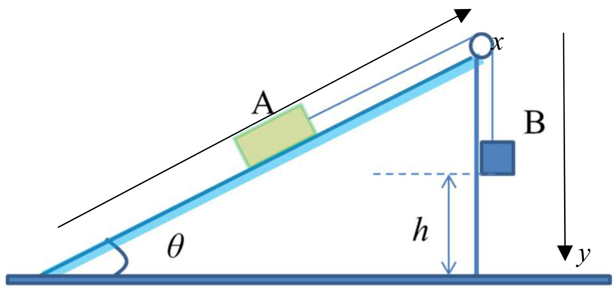
$mg\cos\theta$[N]

(2) 小物体 A にはたらく力のうち、A が斜面から受ける静止摩擦力の大きさを求めよ。

A は斜面に平行に、重力成分から力を受ける。その大きさは $mg\sin\theta$[N]

A は静止しているので、静止摩擦力とこれがつりあっている。∴$mg\sin\theta$[N]

次に、右図のように、小物体 A に軽く伸び縮みしないひもをつけ、滑らかな滑車を通して質量 M[kg]の小物体 B につないだところ、B は壁に接触せずに落下し、A は斜面を登りだした。ここで B の最初の位置は、床から h[m]上にあったとする。以下では、この状況を考えよ。



(3) A と B をつなぐひもの張力を S [N]として、斜面に平行な方向における小物体 A の運動方程式を答えよ。ただし図のように斜面に平行な方向に x 軸をとり、動き出した時刻を $t=0$ とし、B が床に接触するまでの時間だけを考えよ。

A には斜面に平行に(図の x 軸の向きを正として) $S - mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta$ [N] の力を受ける

このことから運動方程式: $m\frac{d^2x}{dt^2} = S - mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta$

(4) A と B をつなぐひもの張力を S [N]として、鉛直方向における小物体 B の運動方程式を答えよ。ただし図のように鉛直下向き方向に y 軸をとり、動き出した時刻を $t=0$ とし、B が h [m]下の床に接触するまでの時間だけを考えよ。

B には鉛直方向に(図の y 軸の向きを正として) $Mg - S$ [N] の力を受ける。

したがって、$M\frac{d^2y}{dt^2} = Mg - S$

(5) 動き出した時刻を $t=0$ としたとき、B が床に落下する時刻を答えよ(注意:S を用いてはいけない)。

(3)と(4)において$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = a$ とし++て a を求める: $(m+M)a = Mg - mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta = g(M - m(\sin\theta + \mu'\cos\theta))$

これから $a = \frac{g(M - m(\sin\theta + \mu'\cos\theta))}{M+m}$

ここで $h = \frac{1}{2}at^2$ が成り立つから、$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h(M+m)}{g(M - m(\sin\theta + \mu'\cos\theta))}}$

(6) 斜面は十分長いとする。小物体 A が到達する地点の x 軸上の座標を答えよ。ただし動き出す直前の A の位置を原点にとる。

B が床に落下したときの A の位置は原点から x 軸にそって h [m]。またこのときの A の速さ $V=at=\sqrt{2ah}$ [m/s]

A が到達する地点はこの点から斜面にそって L[m]であるとする。すると力学的エネルギー保存則より

$\frac{1}{2}mV^2 = mgL\sin\theta + \mu' mgL\cos\theta$ これから $Lg(\sin\theta + \mu'\cos\theta) = \frac{1}{2}V^2$

ここで $V^2 = 2ah = \frac{2gh(M - m(\sin\theta + \mu'\cos\theta))}{M+m}$

よって $L = \frac{\frac{gh(M - m(\sin\theta + \mu'\cos\theta))}{M+m}}{g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)} = \frac{h(M - m(\sin\theta + \mu'\cos\theta))}{(\sin\theta + \mu'\cos\theta)(M+m)}$ 以上から答: $h+L = h + \frac{h(M - m(\sin\theta + \mu'\cos\theta))}{(\sin\theta + \mu'\cos\theta)(M+m)} = h\frac{M(1+\sin\theta + \mu'\cos\theta)}{(\sin\theta + \mu'\cos\theta)(M+m)}$