白井ゼミ資料　　　2017-05-16

最適化数学

第 1 章　で学んだこと

1.1 曲線の方程式 $f(x,y)=0$

点(x, y)における法線ベクトルは ∇f

曲線上の点(x_0, y_0)における接線の式: $(\nabla f,\ \begin{pmatrix} x-x_0, \\ y-y_0 \end{pmatrix}) = 0$

曲面の方程式 $f(x,y,z)=0$

法線ベクトルも接線も，曲線の場合の自然な拡張

1.2　1 次形式 (変数の1次の項だけからなる式)　　$f = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と表すと、 $f = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$　これから　$\nabla f = \nabla(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$

2 次形式 (変数の 2 次の項だけからなる式)

$f = a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + \cdots + a_{nn}{x_n}^2 + 2\,(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{(n-1)n}x_{n-1}x_n\,)$

$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$　(ただし $a_{ij} = a_{ji}$とする)

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$　　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と表すと (A は**対称行列**)　　$f = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$

この対称行列 A を f の**係数行列**とよぶ （したがって、2 次形式の係数行列は対称行列）

$\nabla f = \nabla(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = 2\,A\boldsymbol{x}$

双一次形式: $x_1 \cdots x_n$ と $y_1 \cdots y_n$ に対し1次の項のみからなる式

$f = a_{11}x_1\,y_1 + a_{12}x_1\,y_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$　　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \mathrm{y} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$と表すと ($A$ は**対称行列とは限らない**)

$f = (\boldsymbol{x}, A\,\boldsymbol{y})$　　　　また$(\boldsymbol{x},\ \mathbf{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}) = (\mathbf{Ax}, \mathbf{y})$　　書き換えると $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\boldsymbol{x},\ \mathbf{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y})$

ここで $\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}}$ は行列 $\mathbf{A}$ の**転置行列**

行列 $\mathbf{A}$ が対称行列 $\leftrightarrow$ $\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}$

公式:　任意の $n\times n$ 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ に対し $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

任意の $n\times n$ 行列 $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_n$ に対し $(\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_n)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}_n{}^{\mathrm{T}} \cdots\ \mathbf{A}_1{}^{\mathrm{T}}$

1.3

行列 $\mathbf{A}$ の**固有ベクトル:** に対し　　$\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$　　が成り立つ $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{u}$

λ はその**固有値**

行列 $\mathbf{A}$ が $n\times n$ 対称行列のとき、$\mathbf{A}$ は n 個の実数の固有値をもち、それに対応する固有ベクトル$\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n$は「要素がすべて実数で、互いに直交する単位ベクトル」にできる

正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_n\}$　$\leftrightarrow$　$(\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$　(δ はクロネッカのデルタ)

固有方程式(特性方程式)　$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \boldsymbol{0}$

（グラム・）シュミットの直交化　:線形独立なベクトル列$\boldsymbol{u_1} \cdots \boldsymbol{u}_n$から、その線形結合により組織的に直交系を作り出す方法

直交行列:　正規直交系を列とする行列

典型例:固有ベクトルから得られる正規直交系$\boldsymbol{u_1} \cdots \boldsymbol{u}_n$を用いた行列　$\mathbf{U}=(\boldsymbol{u_1} \cdots \boldsymbol{u}_n)$

$\boldsymbol{U}$ が直交行列 ↔ $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$　すなわち $\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$　($\boldsymbol{U}^{-1}$ は $\boldsymbol{U}$ の逆行列)

行列 **A** から**直交行列** $\boldsymbol{U}$ が得られ対応する固有値を $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ とすると

$\boldsymbol{A}$ の対角化:　$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \boldsymbol{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\lambda_n} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}$ のスペクトル分解（固有値分解）　$\mathbf{A}$　$\boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \boldsymbol{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\lambda_n} \end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$

2 次形式の標準形

2 次形式の係数行列は対称行列

係数行列 A によって $f = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax})$ と表される

A から得られる直交行列 $\boldsymbol{U} = \{ u_{ij} \}$により $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$　という変換を考える

$\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$　なので $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}'$　が成り立つ

標準形:　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}) = (\boldsymbol{Ux}', \boldsymbol{AUx}') = (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AUx}') = (\boldsymbol{x}', \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \boldsymbol{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{\lambda_n} \end{pmatrix}\boldsymbol{x}')$

$$= \lambda_1 {x'_1}^2 + \lambda_2 {x'_2}^2 + \cdots + \lambda_n {x'_n}^2$$

ランク(階数):　行列の0でない固有値の個数

$n \times n$ 対称行列が**正則行列**⇔どの固有値も 0 でない、つまりランクが n

正則行列ならば逆行列が存在

正値（または正定値）対称行列:　どの固有値も正の対称行列

A が正値対称行列　⇔ 任意の **0 でない**ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}) > 0$

A が**半**正値対称行列　⇔ 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}) \geqq 0$

負値（または負定値）対称行列:　どの固有値も負の対称行列

正値 2 次形式:　正値対称行列を係数とする 2 次形式

半正値 2 次形式:半正値対称行列を係数とする 2 次形式

定理 1.12：A が半正値対称行列のとき、2 次形式$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax})$を最大/最小にする単位ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{A}$ の最大/最小固有値に対する固有ベクトル、また最大/最小値は $\boldsymbol{A}$ の最大/最小固有値に等しい