物理学(11)

担当: 白井　英俊

Email: sirai@sist.chukyo-u.ac.jp

11章　仕事とエネルギー

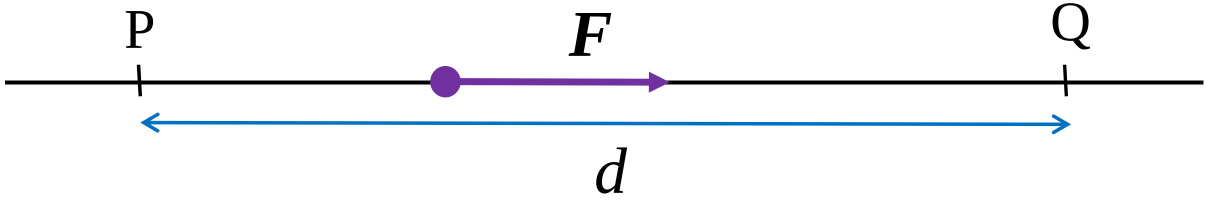
力が仕事をした : 物体にはたらいた力により、物体が変位

仕事とエネルギーの関係: 運動エネルギーなどの形で蓄えられる、
物体がエネルギーを失う

仕事やエネルギーの基礎概念の学習、それらの間の関係式の導出

11.1 仕事

- 力が物体に仕事をする: 物体に大きさFの一定の力$\boldsymbol{F}$が作用し続けて、力の方向にP点からQ点まで距離dだけ動いた時、
  力$\boldsymbol{F}$ がした仕事 $W = Fd$



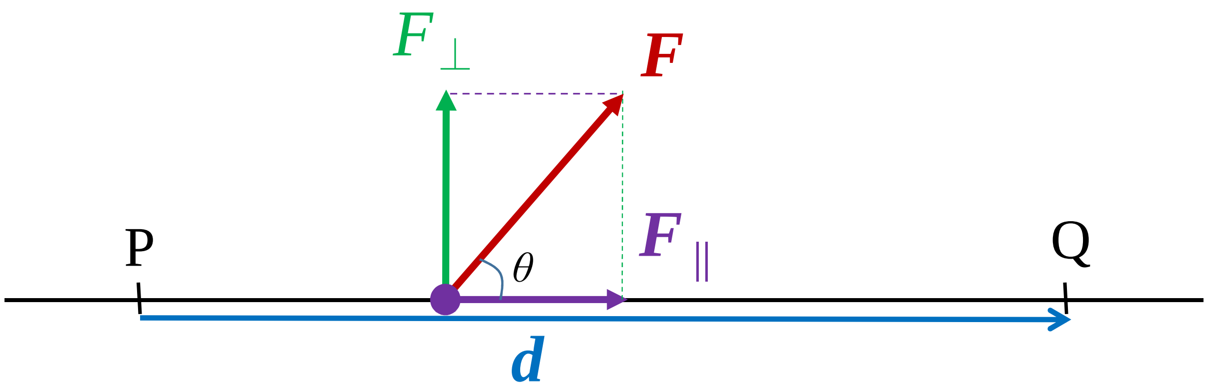
注意: 物体に力がはたらいていても、物体が静止していれば、仕事は0
物体が動いても、その動きに垂直にはたらく力がした仕事は0

一定の力がする仕事

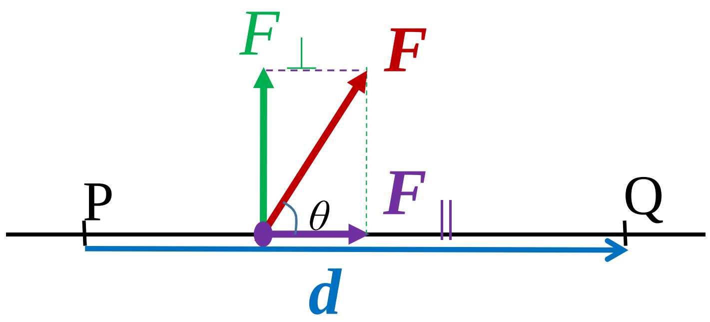
一般には、力の方向と、物体の運動の方向は一致しない

$\Rightarrow$ 力$\boldsymbol{F}$を運動に平行な方向の分力 $F_{\parallel}$と、垂直な方向の分力 $F_{\perp}$にわけて考える

力$\boldsymbol{F}$ がした仕事 $W = \boldsymbol{F}_{\parallel} d = Fd\cos\theta = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d}$ (11.1.2)



一定の力がする仕事



力がする仕事

(i) $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$ (運動の向きに成分をもつ力) W > 0

(ii) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (運動の向きに垂直な力) W = 0

例: 垂直抗力

(iii) $\theta > \frac{\pi}{2}$ (運動の向きに逆向きの成分をもつ力) W< 0

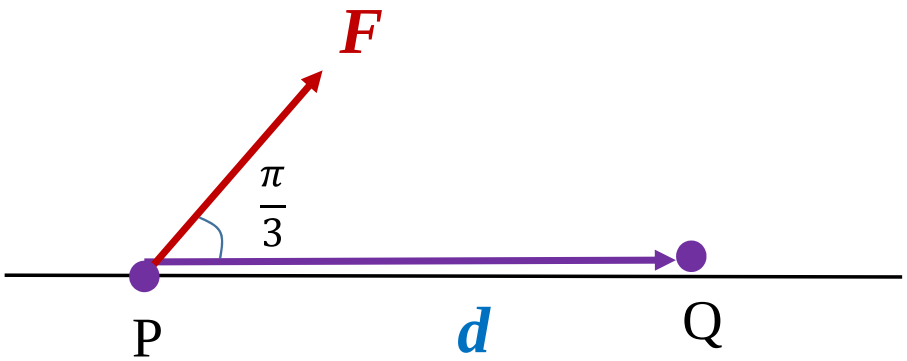
例: 動摩擦力

公式11.1 一定の力のする仕事

$$W = F_\parallel d = Fd\cos\theta = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d}$$

例題11.1 力のする仕事

図のように、質量mの物体に一定の力$\boldsymbol{F}$ ($F < 2\mathrm{mg} / \sqrt{3}$) を加えて粗い水平面(運動摩擦係数$\mu'$)上を距離$d$だけ引っ張るとき、次の力のする仕事はいくらか？



(1) $\boldsymbol{F}$ (2) 運動摩擦力 (3) 重力

[解] (1) $\boldsymbol{F}$ のする仕事は、(11.1.2)式から、$F\,d\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}Fd$

(2) 運動摩擦力$f = \mu' \times$ 面の垂直抗力 N

ここで、 $N = mg - F\sin\frac{\pi}{3} = mg - \frac{\sqrt{3}}{2}F$

運動摩擦力は運動と逆向きなので、その仕事 $= -fd = -\mu'(mg - \frac{\sqrt{3}}{2}F)d$

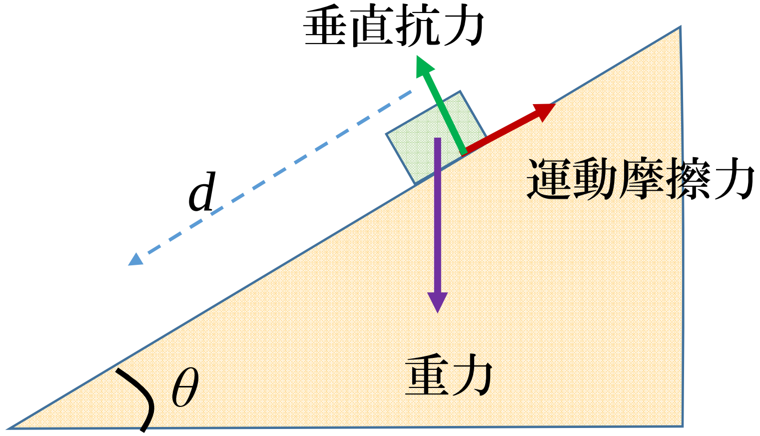
(3) 重力は、運動の向きと垂直なので、その仕事は 0

問28

質量mの質点が傾角θ、運動摩擦係数μ'の粗い斜面上を距離dだけ滑り落ちるとき、次の力のする仕事を求めよ。

(1) 重力　　　　　　(2)運動摩擦力

(3)斜面からの垂直抗力



[解] (1) gを重力加速度の大きさとする。重力は、斜面に平行な分力と斜面に垂直な分力に分けられる。後者は運動に垂直な方向なので仕事は0. 前者の大きさは $mg\sin\theta$ であるから、その仕事 = $mgd\sin\theta$

(2) 運動摩擦力$f = \mu' \times$ 面の垂直抗力 N

ここで $N = mg\cos\theta$　なので、運動摩擦力の仕事= $-\mu' fd = -\mu' mgd\cos\theta$

(3) 斜面からの垂直抗力は、運動の向きと垂直なので、その仕事は 0

仕事と仕事率

仕事の単位　J (ジュール)

1J = 1Nの力を働かせ、その向きに物体を1m動かす仕事

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N \cdot m} = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^2} \qquad (11.1.6)$$

仕事率: 1秒あたりにする仕事の割合

単位は W (ワット)

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s} = 1\ \mathrm{N \cdot m/s} = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2/s^3} \qquad (11.1.7)$$

問29

1 kW (キロワット)の仕事率で1時間にする仕事を 1 kWh (キロワット時)という。1 kWh は何Jか？

[解] 1 kWh $= 1\times10^3 \times (60\times60)$ Ws

$=3.6\times10^6$ Ws

$=3.6\times10^6$ J (もしくは 3.6 MJ)

仕事率

物体が力$\boldsymbol{F}$[N] を受けて dt[s]の間に$d\boldsymbol{r}$ [m]だけ変位したとすると、

この間に力がした仕事　$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$

仕事率 $$\mathbf{P} = \frac{\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{v} \qquad (11.1.8)$$

ただし、 $\boldsymbol{v}$ は速度$\left(= \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)$

大きさが変化する力のする仕事

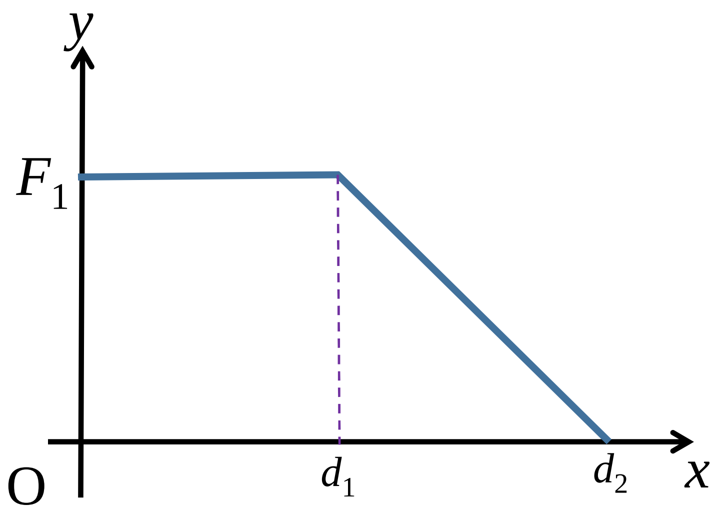
直線(x軸)上を運動する物体に、大きさが変化する力 $\boldsymbol{F}(x)$ が働いている場合、物体が x_{P}からx_{Q}まで移動するとすると、この間に力$\boldsymbol{F}$がした仕事W

$$\mathrm{W} = \int_{x_{\mathrm{P}}}^{x_{\mathrm{Q}}} F(x)dx \tag{11.1.9}$$

これは、力Fの大きさが一定であった(11.1.1)式の自然な拡張になっている

問30

物体が図のような力を受けてx=0からx=d_2まで動いた時、力がした仕事を求めよ。



[解]　xの値が[0, d_1] の区間と、 [d_1 , d_2] の区間で、力による仕事を分けて求める

[0, d_1] 区間は、力の値は一定値(F_1)であったので、その間の仕事$W_1 = F_1 d_1$

[d_1 , d_2] 区間は、力の値 $F = \frac{F_1}{d_1-d_2}(x- d_2)$

よって、その間の仕事$W_2 = \int_{d_1}^{d_2} F dx = \int_{d_1}^{d_2} \frac{F_1}{d_1-d_2}(x- d_2)dx = \frac{1}{2} F_1(d_2 - d_1)$

ゆえに、$W_1+W_2 = F_1 d_1 + \frac{1}{2} F_1(d_2 - d_1) = \frac{1}{2} F_1(d_1+d_2)$

力のする仕事(最も一般的な場合)

大きさ、方向、向きともに変化する力$\boldsymbol{F}$を受けながら、３次元空間内を物体が運動する場合:

　物体が描く運動曲線をCとし、点P($\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$)から点Q($\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$)まで移動したとすると、

力$\boldsymbol{F}$による仕事W= $\int_{P,C}^{Q} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$　(ただし積分の経路はCとする)

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i)\cdot \Delta\boldsymbol{r}_i \qquad (11.1.11)$$

もっとも、力が保存力なら経路によらずPとQの位置だけで計算できる

11.2 仕事と運動エネルギー

力がある距離にわたって物体に対して仕事をしたときの効果

x軸上を、大きさが変化する力Fを受けて運動している質量mの質点を考える

時刻t_1のとき位置x_1を速度v_1で通過

時刻t_2のとき位置x_2に達し、速度がv_2とする

ここで、 $v\ (=\frac{dx}{dt})$ は速度とする　つまり、$v(t_1) = v_1,\ v(t_2) = v_2$

このときに力$\boldsymbol{F}(x)$がした仕事 $W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{t_1}^{t_2} Fv\,dt$ (11.2.12)

参考 $\int Fvdt = \int F\frac{dx}{dt}dt = \int Fdx$

11.2 仕事と運動エネルギー(続)

力$\boldsymbol{F}(x)$がした仕事 W = $\int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{t_1}^{t_2} Fv\,dt$ (11.2.12)

運動方程式 $m\dfrac{dv}{dt} = F$ を用いると、

t_2における運動エネルギー

t_1における運動エネルギー

$$\int_{t_1}^{t_2} Fv\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}v\,dt = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}v^2\right)dt$$

参考: $\int m\frac{d}{dt}(v^2)dt = m\left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v_1}^{v_2}$

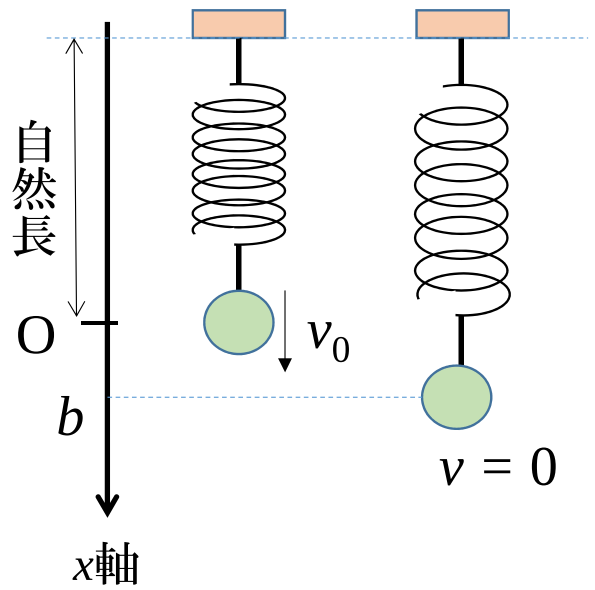
$$= \frac{m}{2}({v_2}^2 - {v_1}^2) = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

これから、$\boxed{\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2} = \boxed{\int_{x_1}^{x_2} F\,dx}$ (11.2.14)

運動エネルギーの差　力Fがした仕事　**エネルギー原理**

例題11.2 ばねの最大伸び

ばね定数kのバネの一端を固定して鉛直に吊るし、他端に質量mのおもりをつける。ばねの自然長の位置でおもりに鉛直下向きの初速v_0をあたえたときのばねの最大の伸びbを求めよ。



[解] ばねの伸びがxのときにおもりにはたらく力Fは

$$F = mg - kx$$

運動エネルギーと仕事の関係(11.2.14) より

$$\frac{1}{2}m0^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \int_0^b (mg - kx)dx = (mgb - \frac{1}{2}kb^2)$$

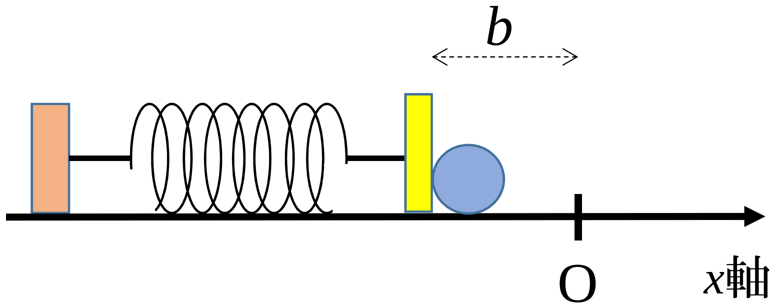
ゆえに、$kb^2 - 2mgb - m{v_0}^2 = 0$

これから $b > 0$ より $b = \dfrac{mg + m\sqrt{g^2 + k{v_0}^2}}{k}$

参考: ばね定数 kのばねが自然長よりx[m]伸び/縮む場合に蓄えられるエネルギーを『弾性エネルギー』といい、位置エネルギーの一種。その値は $\int_0^x k\, l dl = \frac{1}{2}kx^2$ [N]

問31　小球の速度

なめらかな水平台の上で、ばね定数kのバネの一端を固定し、他端に軽い板をつける。いま板に質量mの小球をおしつけ、ばねを自然長より長さbだけ縮めてから手を放した。小球が板から離れるときの速度を求めよ。



[解] ばねの伸びがxのときにおもりにはたらく力Fは

$$F = -kx$$

小球が板から離れる速度をvとすると、運動エネルギーと仕事の関係より

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m0^2 = \int_b^0 (-kx)dx = \frac{1}{2}kb^2$$

これから　$v = b\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

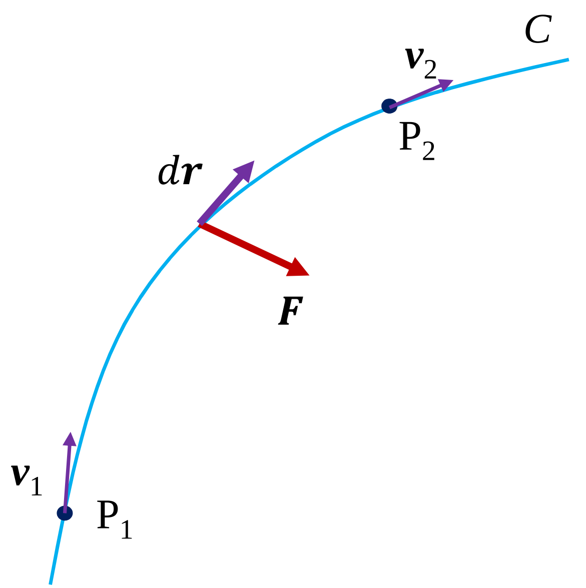
一般の空間運動の場合

物体が力$\boldsymbol{F}$を受け、空間内を運動する場合

時刻t_1から時刻t_2の間に点 P_1から点P_2まで運動曲線Cに沿って移動したとする

運動エネルギーと仕事の関係: (v_1, v_2はそれぞれ時刻t_1、t_2の速度$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$の大きさ)

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2 = \int_{P_1,C}^{P_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad (11.2.18)$$



11.3 位置エネルギーと保存力

- 位置エネルギー

  力$\boldsymbol{F}$を受けて直線上を運動する質点を考える

  力$\boldsymbol{F}$が位置xのみによって定まる場合、つまり$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(x)$ と表されるとき、

  空間はその力の場になっている、という

  点xにおいて質点のもつ位置エネルギー、ポテンシャルエネルギー(単にポテンシャル) $U(x)$

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx \qquad (11.3.19)$$

  ここで、x_0 は任意に選んだ定点とする

(11.3.19)式は、$F(x)$に対抗する力$-F(x)$ を加えて質点をx_0からxまで運んだ時にした仕事に等しい ⇒ この仕事がエネルギーとして点xにきた質点に蓄えられたと考え、『位置エネルギー』と命名

例題11.3 力に対する位置エネルギー

[問]　次の各力は場の力とみることができる。各力に対する位置エネルギー(ポテンシャル)を求めよ。

(1) 重力 (mg)　　(2) 弾性力($-kx$)　　(3) 万有引力 ($-G\frac{Mm}{r^2}$)

[解]

重力(mg)に対して:　$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx$　の式にあてはめることを考える

鉛直上方にx軸をとり、地表面(x=0)を基準原点かつ位置エネルギーの基準点($U(x)$の式におけるx_0)とする。重力$F(x) = -mg$ なので、点x'における位置エネルギーは

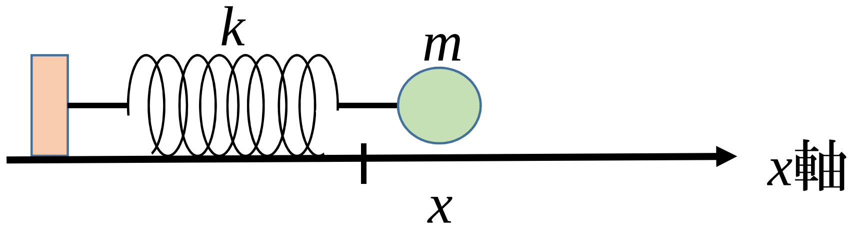
$$U(x') = -\int_{x_0}^{x'} F(x)dx = -\int_{0}^{x'}(-mg)dx = [mgx]_{0}^{x'} = mgx'$$

x'をxで書き直すと、 $U(x) = mgx$

例題11.3 力に対する位置エネルギー

[問]　(2) 弾性力(-kx)に対する位置エネルギー(ポテンシャル)を求めよ

[解]　弾性力(-kx)に対して



$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx$　の式にあてはめる

ばねの一端を固定し、他端に質点をとりつけたバネ定数kのばねをなめらかな床の上におく。ばねの自然長の位置を基準原点にとり、ばねが伸びる方向にx軸をとる。

この基準原点はまた、位置エネルギーの基準点($U(x)$の式中のx_0)とみなせる。

ゆえにばねがx'だけ伸びた位置で質点がもつエネルギーは ($F(x) = -kx$から):

$$U(x') = -\int_{x_0}^{x'} F(x)dx = -\int_{0}^{x'} (-kx)dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{x'} = \frac{1}{2}kx'^2$$

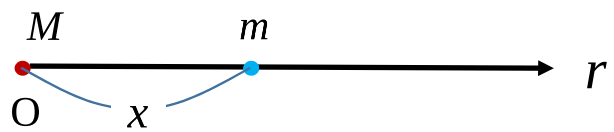
x'をxで書き直すと、 $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

例題11.3 力に対する位置エネルギー

[問]　(3) 万有引力 $(-G\frac{Mm}{r^2})$ に対する位置エネルギー(ポテンシャル)を求める

[解]　万有引力 $(-G\frac{Mm}{r^2})$に対して

$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx$　の式にあてはめる



質量Mの物体を原点Oとし、質量mの質点が物体Mから、大きさが$G\frac{Mm}{r^2}$の万有引力を受けて、直線$\boldsymbol{r}$上を動くとする。ここでGを万有引力定数とし、直線$\boldsymbol{r}$において原点Oから物体mの方向にx軸をとる。

ここで、物体mが位置xでもつ位置エネルギーは基準点をx_0として:

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx = -\int_{x_0}^{x}\left(-G\frac{Mm}{r^2}\right)dr = \left[G\frac{Mm}{r}\right]_{x_0}^{x} = -GMm\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)$$

基準点x_0を無限遠点にとれば$U(x) = -G\frac{Mm}{x}$

つまり、Mに近いほど(重力で例えると地表に近い)ポテンシャルが低く、遠ざかるほど(地表から高く離れるほど)ポテンシャルが高い

問33　運動摩擦と位置エネルギー

[問] 粗い水平面上を運動するとき、一定の大きさの運動摩擦力 $\mu' mg$ がはたらく。運動摩擦力に対して位置エネルギーを定義できるか？

[解]　位置エネルギーの定義と、運動摩擦力の性質を確認する

位置エネルギー:力$\boldsymbol{F}$が位置xのみによって定まる場合、点xにおいて質点のもつ位置エネルギー、ポテンシャルエネルギー(単にポテンシャル) $U(x)$

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx$$

$\Leftarrow$ *基準点* x_0からxまでの経路によらずに決まる値

運動摩擦力: 物体の質量m、床からの垂直抗力mg、動摩擦係数μ'として、一定の大きさの運動摩擦力$\mu' mg$ がはたらく。その力がする仕事は、物体が描く運動曲線をCとし、点P($\boldsymbol{r}_{\mathrm{P}}$)から点Q($\boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}}$)まで移動したとすると、

力$\boldsymbol{F}$による仕事W= $\int_{P,C}^{Q} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$

$\Leftarrow$ *基準点* PからQまでの経路に依存した値

以上から、結論は「定義できない」

一般の空間運動の場合

場の力$\boldsymbol{F}(r)$の作用のもとに３次元空間を運動する場合

　場所ごとに質点がその場でもつ位置エネルギーが定まっているとする

点Pの位置エネルギー

　基準点Q($\boldsymbol{r}_0$)と任意の点P($\boldsymbol{r}_\mathrm{P}$)における位置エネルギーの差

　＝点Qにいる質点を、場の力$\boldsymbol{F}(r)$につり合う力－$\boldsymbol{F}(r)$を加えながら点Pまで運ぶとして、その力がした仕事

　途中の経路によらず始点と終点のみから、力がした仕事が決まる場合

$$-\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{P}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = U(\boldsymbol{r}_P) \qquad (11.3.23)$$

ポテンシャルと保存力

力$\boldsymbol{F}$が位置xのみによって定まる場合、点xにおいて質点のもつ位置エネルギー、ポテンシャルエネルギー(単にポテンシャル) $U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx$

$\Leftarrow$ *基準点* x_0からxまでの経路によらずに決まる値

これを、位置ベクトル$\boldsymbol{r}$、基準点ベクトル$\boldsymbol{r}_0$を用いると、位置$\boldsymbol{r}_\mathrm{p}$での位置エネルギー(ポテンシャル): $U(\boldsymbol{r}_\mathrm{p}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{p}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$

よって、$U(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$

$\fallingdotseq -\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -F_\mathrm{x}dx - F_\mathrm{y}dy - F_\mathrm{z}dz$

左辺は、Uの全微分($dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$)に等しいので、

公式11.4: $-\frac{\partial U}{\partial x} = F_x \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z$

逆に、あるスカラー関数Uを微分して力$\boldsymbol{F}$が得られるとき、*Uを$\boldsymbol{F}$に対するポテンシャル*、または保存力という